Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2018

Mafalda Alexandra dos Santos Ferreira

Composição de funções: uma abordagem exploratória com o GeoGebra

Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2018

Mafalda Alexandra dos Santos Ferreira

Composição de funções: uma abordagem exploratória com o GeoGebra

Relatório apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Isabel Cabrita, Professora Auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro

A Deus,
à minha família,
especialmente às minhas avós
Maria Regina e Maria Isabel,
e à minha família do coração que me apoiaram
sem cessar.

o júri

presidente

Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge
Professora Adjunta do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À Professora Doutora Isabel Cabrita, que me orientou durante toda a realização desta dissertação e todo o estágio guiando-me a cada passo.
Às minhas duas avós, a quem dedico especialmente esta dissertação, por toda a dedicação ao longo dos anos de universidade.
Aos meus pais, Elsa e Manuel, que sempre me apoiaram e amaram.
À minha restante família que é um pilar de amor sempre presente e compreensível.
Aos amigos que me obrigaram a não desistir e me sustentaram em muitos momentos de pouca fé, especialmente ao Rui, à Sandra e à Francisca.
E ao Diogo Silva, quem veio em último para me apoiar, mas muito especialmente me sustentou com o seu amor incondicional.

palavras-chave GeoGebra, Motivação, Funções, Composição de funções, Ensino Secundário.

Resumo

O insucesso escolar na disciplina de Matemática no tópico das Funções é evidente nos exames nacionais do final do 12.º ano de escolaridade. As dificuldades neste tópico prendem-se essencialmente com a dualidade do conceito de função (que pode ser entendida como um objeto ou como um processo), a restrição do conceito de função à sua representação gráfica e ambiguidade simbólica. A composição de funções é um dos conceitos onde os alunos verificam mais dificuldades dentro deste tópico.

Como a capacidade de representar, classificar e identificar funções nas suas diferentes formas (numéricas, algébricas ou gráficas) concede ao aluno uma maior compreensão do tema das Funções, neste estudo optou-se por explorar as múltiplas representações de funções compostas através do software GeoGebra, que também pode contribuir para a motivação dos alunos, em paralelo com as tecnologias tradicionais de papel e lápis. Assim, definiu-se como principal questão de investigação "Num contexto de sala de aula, uma adequada utilização do GeoGebra, aliada ao uso de ferramentas tradicionais, contribui para uma mais sólida e motivadora apropriação de conceitos matemáticos?".

O estudo qualitativo de caso múltiplo envolveu cinco grupos de alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade do curso Científico-Humanístico e privilegiou como técnicas de recolha de dados a observação, a recolha documental e a inquirição. Tais dados foram alvo de uma análise de conteúdo, orientada por um sistema de categorias que emergiu da literatura revisitada.

Os resultados corroboram conclusões de estudos anteriores, revelando que uma abordagem didática que usa em paralelo o GeoGebra e as ferramentas tradicionais de papel e lápis pode contribuir para uma sólida aprendizagem dos conceitos, neste caso, referentes à composição de funções. Os resultados suportam ainda que os alunos consideraram esta abordagem didática motivadora.

keywords

GeoGebra, Motivation, Functions, Function composition, Secondary school level.

Abstract

School failure in the Function topic within the discipline of Mathematic is evident for example in the National Exams at the end of Secondary School. The difficulties in this topic relate essentially to the duality of the function concept (since it can be perceived as an object or as a process), also the restriction of the function concept only to its graphic representation and the symbolic ambiguity. Function composition is one of the concepts where students exhibit more difficulties within this topic.

The ability to represent, classify and identify functions in its different forms (numerical, algebraic or graphical) grants the students a greater understanding of the topic of Functions. Given such, in this study it was decided to explore multiple representations of composed functions through the GeoGebra software, wich can also contribute to the motivation of students, side-by-side with the traditional technologies of paper and pencil. Thus emerging the main research question: In classroom context, does a proper use of GeoGebra allied to the use of traditional tools, contribute for a more solid and motivating appropriation of mathematical concepts?

The multiple case of qualitative nature considered five groups of students from a class of 11th year of the Humanistic and Scientific Course and favored as data collecting technique's observation, the gathering of documents and cross-examination. Such data were subjected to content analysis, driven by a system of categories that emerged from the literature revised.

The results corroborate the conclusions from previous studies, revealing that a didactic approach that uses side-by-side GeoGebra and the traditional technologies of paper and pencil can contribute to a more solid learning of concepts, in this case, concerning the composition of functions. The results support that students considered this didactic approach motivating.

Índice

Índice

Índice

Índice de ilustrações:

Índice de ilustrações

Índice de ilustrações

Índice de ilustrações

Índice de ilustrações

Índice de tabelas:

Introdução

Introdução

Neste ponto, é apresentada a problemática em estudo, são referidas as questões e os objetivos de investigação e a forma como este documento se encontra estruturado.

Problemática de estudo

O tema das Funções é fundamental para a vivência e compreensão do mundo que nos rodeia e para a Matemática em geral (Ayalon, Watson, & Lerman, 2017; Saraiva, Teixeira, & Andrade, 2010). Mais especificamente, todos os conceitos explorados nesse tema são essenciais para o prosseguimento de estudos na área das ciências exatas, nomeadamente para a compreensão da disciplina de Cálculo, disciplina esta que é crucial para, por exemplo, futuros engenheiros, cientistas e matemáticos (Carlson, 1998; Oehrtman & Thompson, 2005). Assim sendo, as Funções é um dos domínios que pode ter impacto na competência profissional de pessoas com responsabilidades que vão, por exemplo, desde a construção de edifícios, à deteção de modelos no comportamento de vários fenómenos, passando pelo avanço do conhecimento científico em geral.

Considerando este panorama, não admira que as Funções ocupem um lugar de destaque no Currículo de Matemática do Ensino Secundário (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2013; Gaspar & Cabrita, 2014; Hitt, 1998; Saraiva & Teixeira, 2009). Contudo, as Funções não são introduzidas no Ensino Secundário, mas no Ensino Básico. De acordo com o Programa Curricular homologado em junho de 2013 em Portugal, este tópico é lecionado no 7.º ano de escolaridade no domínio Funções, Sequências e Sucessões. A partir deste ponto, está previsto, neste programa, o aluno consolidar e progressivamente evoluir no domínio das Funções.

O Programa Curricular que se encontrava em vigor para o 11.º ano de escolaridade no ano letivo em que este estudo foi realizado tem como um dos temas centrais Funções Reais e Análise Infinitesimal. Assim, seria um dos temas que teria de ser lecionado no contexto do estágio pedagógico em curso em 2015/16. Foi selecionado por, apesar da sua importância e ênfase no Currículo, na aprendizagem do domínio das Funções, os alunos revelam muitas dificuldades de compreensão e no próprio uso dos símbolos associados (Saraiva et al., 2010; Saraiva & Teixeira, 2009). Deu-se particular destaque à composição de Funções já que, de acordo com a calendarização prevista, a sua abordagem ficaria a cargo da autora deste Relatório.

Pode-se encontrar evidências destas dificuldades, por exemplo, nos exames nacionais do final do 12.º ano de escolaridade. Os exames finais nacionais são instrumentos certificadores das aprendizagens no ensino secundário notórios a nível social, pois são o mais comum método de seleção no acesso ao ensino superior. Estes possuem como finalidade obter juízos de valor sobre os desempenhos dos alunos e a informação sobre esses mesmos desempenhos. Uma outra finalidade destes é a possibilidade de permitir aos docentes melhorarem a sua prática educativa, posteriormente, através de uma intervenção informada junto dos seus alunos (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2017b).

Considerando o exame final de Matemática A da primeira fase, no ano de 2013, a média de classificações dos alunos internos é de 10,4 valores (em 20), enquanto que a dos alunos autopropostos é de 5,4 (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2013b). Quanto ao exame da primeira fase de Matemática A do ano de 2014, a média de classificações dos alunos internos foi de 9,2 valores, com uma taxa de reprovação de 22%. Os alunos autopropostos verificaram uma média de 4,8 valores e uma taxa de reprovação de 86% (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2014). Em 2015, na primeira fase, a média de classificações obtidas pelos alunos internos foi de 12,1 valores, com uma taxa de reprovação de 11%. Em relação aos alunos autopropostos, verificou-se uma taxa de reprovação de 71%, sendo que a média verificada foi de 6,8 valores (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2015). No ano de 2016, na primeira fase, a média das classificações obtidas pelos alunos internos foi de 11,2 valores, enquanto que para os alunos autopropostos foi de 5,8 (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2017a).

Relativamente às Funções, no relatório do Ministério da Educação e Ciência que disseca, entre muitos outros, os resultados dos exames nacionais de Matemática A, para o 12.º ano de escolaridade, do ano letivo 2011/2012, constata-se que foi o tema no qual os alunos revelaram pior desempenho (Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação, 2013a). Nos dois anos letivos anteriores, 2009/2010 e 2010/2011, os itens com pior desempenho não se enquadravam tão explicitamente no tema das Funções, porém alguns destes encontravam-se enquanto conexões, nomeadamente as funções trigonométricas. No Relatório Nacional que analisou os exames nacionais do ensino secundário referentes aos anos de 2010 a 2016 (Gabinete de Avaliação Educacional - Governo de Portugal, 2017b), as tarefas no âmbito das Funções foram analisadas no que toca a competências mobilizadas (Conhecimentos – conceitos, regras e propriedades; procedimentos – cálculo; resolução de problemas; utilização da calculadora; comunicação matemática e raciocínio demonstrativo). No tema das Funções, os itens nos quais os alunos revelaram melhor desempenho foram os que envolviam o conhecimento de conceitos, regras e propriedades. Quando as capacidades mobilizadas envolvem procedimentos, o desempenho piora. Os autores ainda puderem constatar que nos itens nos quais o número de etapas de resolução fosse elevado os resultados dos alunos eram inferiores (Gabinete de Avaliação Educacional - Governo de Portugal, 2017b). Assim sendo, pode-se concluir objetivamente que, a nível nacional, os alunos revelam bastantes dificuldades no tema das Funções.

Algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos prendem-se com a dualidade do conceito de função, dado que uma função pode ser entendida numa perspetiva estrutural (como um objeto) ou numa perspetiva operacional (como um processo). Há, ainda, a tendência de identificar o conceito de função com a sua representação gráfica. Também a ambiguidade simbólica, cuja interpretação dependente do contexto, pode ser um impasse para o aluno, uma vez que, por exemplo, y pode referir-se à ordenada de um certo ponto do sistema de coordenadas ou pode estar a referir-se a um dado valor da função (Mourão, 2002; Saraiva et al., 2010).

Especificamente, na aprendizagem da composição de funções, os alunos revelam muitas dificuldades, o que é um possível impedimento não só para a aprendizagem do conceito em si mas para a aprendizagem de futuros conceitos matemáticos, pois a composição de funções é uma ferramenta poderosa para a compreensão de muitas ideias na ciência e no *curriculum* da matemática. Tome-se o caso da regra da cadeia na derivação de funções mais complexas (Ayers, Davis, Dubinsky, & Lewin, 1988).

Perante isto, cabe ao professor, na sua sala de aula, adaptar-se à sua realidade para enfrentar todas as dificuldades que surgem em todo o processo de aprendizagem dos seus alunos. Neste tema, a capacidade de representar, classificar e identificar funções nas suas diferentes formas, sejam estas numéricas, algébricas ou gráficas, concede ao aluno uma maior compreensão do tema Funções (Saraiva et al., 2010). E uma forma de se conseguirem essas múltiplas representações é através do *software* GeoGebra. Neste estudo, optou-se precisamente pelo uso do GeoGebra em sala de aula enquanto suporte didático, quer pelas suas potencialidades quer porque os alunos já estavam familiarizados com este *software*.

O GeoGebra é um *software* dinâmico de Matemática que, apesar de ter apenas cerca de 17 anos de existência, já deixou a sua marca no ensino da Matemática a nível mundial. Este *software* tem um conjunto de características favoráveis à sua aplicação no ensino, nomeadamente a gratuidade, a simplicidade e o ambiente gráfico. Mas, a maior potencialidade advém do facto da sua interface dinâmica reunir Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral (J. Silva, Oliveira, K. Silva, Barbosa, Lima, Eloy, & Camelo, 2012). Por outro lado, o GeoGebra pode contribuir para a motivação dos alunos, o que se revela um dos grandes desafios colocado ao professor dada a sua relação com o sucesso na aprendizagem. Ainda mais, o uso de um ambiente de geometria dinâmico, como é o GeoGebra, pode ser potenciado pelo uso das tecnologias tradicionais de 'papel e lápis', contribuindo para uma aprendizagem mais consolidada e rica (Coelho & Cabrita, 2015; Gaspar & Cabrita, 2014).

A motivação é um dos fatores que tomam parte no sucesso educativo do aluno. Reynolds e Walberg (1992) distinguem nove fatores de produtividade para este mesmo processo ser bem sucedido. Estes autores separam estes fatores em três conjuntos. O primeiro conjunto engloba a aptidão e os atributos do aluno. Neste conjunto, encontram-se como fatores a capacidade do aluno ou sucesso académico prévio, a idade ou o nível de desenvolvimento e a motivação. No segundo conjunto, é indexada a instrução, destacando como fatores a sua quantidade e a sua qualidade. No conjunto final, encontram-se quatro fatores, todos estes relacionados com o ambiente psicológico - o clima de sala de aula, as qualidades estimulantes do ambiente em casa do próprio aluno, o ambiente entre o aluno e os seus colegas de turma e tempo de lazer despendido nos média em massa.

No primeiro conjunto foi, então, destacada a motivação como um dos fatores que, dentro dos atributos dos alunos, influência o sucesso educativo do estudante. Também os investigadores Lourenço e Paiva (2010) ressaltam que, no ensino, a motivação é crucial no desempenho académico dos alunos, uma vez que tem implicações diretas na qualidade do envolvimento do estudante no processo de ensino e aprendizagem.

Quanto à turma na qual foi realizado este estudo, integrava alunos que revelavam falta de motivação.

Introdução

Silver (2002), pronunciando-se em nome do comité *NRC on Scientific principles in educational research* sobre a natureza da investigação em educação e como esta poderá ser definida e conduzida de modo a ser credível e a assegurar o progresso científico através da acumulação de conhecimento útil e utilizável, defende que não pode ocorrer meramente através de experiências aleatórias. Segundo este comité, para que uma investigação em educação seja sólida, os investigadores têm de levantar questões significantes e relacioná-las com a teoria relevante, aplicando o método e instrumentos adequados à resposta a essas mesmas questões. É o que se tentará no âmbito deste estudo, cuja problemática se revela extremamente atual.

Questões de investigação e objetivos

Neste contexto, a principal questão de investigação que orienta este trabalho é a seguinte:

- Num contexto de sala de aula, uma adequada utilização do GeoGebra, aliada ao uso de ferramentas tradicionais, contribui para uma mais sólida e motivadora apropriação de conceitos matemáticos?

Decorrente da mesma, os principais objetivos de investigação serão analisar em que medida o GeoGebra, quando explorado complementarmente à utilização de tecnologias de papel e lápis, por alunos do 11.º ano de escolaridade:

- contribui para uma mais sólida construção e aplicação de conhecimentos relativos à composição de funções;
- se constitui um fator de motivação acrescida para a aprendizagem.

Organização do Relatório

Este Relatório encontra-se estruturado em três capítulos principais, mas começa-se com uma introdução, na qual se aborda a problemática do estudo, as questões e os objetivos de investigação. Por fim, ainda se apresenta a organização do estudo.

O primeiro capítulo consiste no enquadramento teórico, que se ramifica em três assuntos principais, sendo estes Funções e o conceito de composição de funções, a motivação e o GeoGebra.

Introdução

No segundo capítulo, clarifica-se o método usado neste trabalho, justificando-se as opções metodológicas, caracterizando-se os participantes no estudo, as técnicas e instrumentos de recolha de dados e as fases do estudo. Ainda neste capítulo, aborda-se a maneira como os dados recolhidos foram tratados e a forma como estes serão apresentados.

No terceiro capítulo, encontra-se a análise dos resultados.

Por fim, encontram-se as conclusões deste Relatório. O mesmo termina com as referências bibliográficas e apêndices.

1. Enquadramento teórico

1. Enquadramento teórico

Neste capítulo, aborda-se o tema das Funções, a motivação para a aprendizagem e o GeoGebra no processo educativo.

Aprender Matemática é "um direito básico de todas as pessoas— em particular, de todas as crianças e jovens — e uma resposta a necessidades individuais e sociais." (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, p. 17). Porém, o prisma de muitos alunos não é este. Para muitos estudantes, não se trata de um direito, mas de uma obrigação, sendo que muitos destes se sentem desmotivados dentro da sala de aula de matemática.

Questões como 'de que forma motivar os alunos?' ou 'de que maneira os alunos de uma turma irão melhor compreender os tópicos que estão a ser abordados?' são questões que qualquer professor já colocou na sua vida profissional.

Dado que nenhum Ser Humano é completamente igual a outro, estas questões não têm uma resposta única. Contudo, o professor tem o dever de, conforme o que lhe é possível, otimizar o número de alunos que aprendem.

Neste enquadramento teórico, discute-se como o GeoGebra pode contribuir para um estudo mais interessante e sólido de Matemática e, em particular das Funções.

1.1. O tópico das Funções no Ensino Secundário

O conceito de função é essencial para a compreensão do mundo e da Matemática (Ayalon et al., 2017; Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007; Hitt, 1998; Kleiner, 1993; Makonye, 2014; Meel, 1999; Saraiva et al., 2010). Por isso, é um dos tópicos mais importantes do curriculum, estabelecendo uma forte relação com outras disciplinas (Basibuyuk, Sahin, Gokkurt, Erdem, & Soylu, 2016; Brown, 2007; Dede, 2006; Doorman et al., 2013; Meel, 1999; Panaoura, Michael-Chrysanthou, & Philippou, 2015; Saraiva et al., 2010; Saraiva & Teixeira, 2009; Sierpinska, 1992).

No ensino do tópico das Funções, é importante considerar todo o historial do conceito de função uma vez que "*When trying to constitute mathematical comprehension and to explain the obstacles to understanding that the students experience, people often bring up the concepts and their epistemological complexity. And this epistemologic complexity can* *be explained by the history of their discovery.*” (Duval, 2006, pp. 105–106). Por isso, analisaremos de um modo muito sucinto esta evolução.

Em termos históricos, a própria conceção de função sofreu mudanças na comunidade matemática. O conceito de função foi iniciado na Antiguidade com casos particulares de dependência entre duas quantidades, continuando na Idade Média com o isolamento de algumas das noções (Elia et al., 2007; Mourão, 2002; Ponte, 1990). Explicitamente, só emergiu no século XVIII, sendo que a nomenclatura de “função” foi pela primeira vez usada em 1692 pelo matemático Leibniz (1646-1716) para designar um objeto geométrico associado a uma curva (Kleiner, 1989,1993; Meel, 1999).

Euler (1707-1783) definiu uma função como uma expressão analítica denotando-a mesmo por f(x), se bem que viria ainda a alterar ligeiramente a sua definição posteriormente. Dirichlet (1805-1859) foi o primeiro matemático que defendeu que a definição de função deve englobar uma variável a depender doutra variável de maneira arbitrária. Segundo esta definição, pode-se encontrar exemplos de funções com pelo menos 4000 anos, como as tabelas babilónicas para os números quadrados e cúbicos dos números naturais. Este povo tabulou ainda vários fenómenos astronómicos em “função” do tempo (Kjeldsen & Lutzen, 2015).

O conceito de função foi evoluindo com alguns dos problemas que foram levantados no cálculo e na análise. É mais percetível toda essa evolução quando se constata que, numa fase inicial, não eram consideradas funções com domínio dividido, funções descontínuas, funções definidas por um gráfico ou, como já foi mencionado, funções compostas por correspondências arbitrárias. É o caso da função de Dirichlet, que está definida como sendo 0 para os números reais irracionais e 1 para os números racionais. Esta função foi um marco histórico, pois respeitava a definição de função que prevalecia na altura. Era dada por uma expressão analítica mas não era contínua.(Kjeldsen & Lutzen, 2015; Meel, 1999; Vinner & Dreyfus, 1989).

A definição de função tal como a conhecemos hoje foi apenas sintetizada em 1939 por Bourbaki, baseando-se na teoria de conjuntos. Por esta altura, a pergunta que se colocava era a de por que meios é que o mapeamento (tome-se, por exemplo, os diagramas de Venn para compreender o que quer dizer mapeamento neste contexto) poderia ser definido. Bourbaki resolveu a questão indicando que uma função entre os conjuntos A e B é um subconjunto de

AxB, com a propriedade de que, para cada elemento x em A, existe exatamente um y em B tal que (x,y) está em AxB (Kjeldsen & Lutzen, 2015).

O conceito de função moderno (que pode também ser intitulado de conceito de Dirichlet-Bourbaki) consiste numa correspondência entre dois conjuntos não vazios que atribui a todo o elemento do primeiro conjunto (domínio) um único elemento do segundo conjunto (conjunto de chegada) (Vinner & Dreyfus, 1989).

Também no plano curricular atual, "dados conjuntos A e B, (…) fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B», quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por f(x)" (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013, p.54).

Assim sendo, podemos verificar que a consolidação do conceito de função tal como o conhecemos demorou o seu tempo, aliás é um dos conceitos que diferencia a Matemática Clássica da Matemática Moderna (Kleiner, 1989).

Na sala de aula, na aprendizagem dos conceitos pertencentes ao domínio das Funções, os alunos revelam muitas dificuldades de compreensão e, inclusivamente, no próprio uso dos símbolos associados (Brown, 2007; Dede, 2006; Doorman et al., 2013; Meel, 1999; Panaoura et al., 2015; Saraiva et al., 2010; Saraiva & Teixeira, 2009; Sierpinska, 1992).

Grande parte dessas dificuldades têm um curioso paralelo com a evolução do conceito de função na comunidade matemática. Os autores Vinner e Dreyfus (1989) categorizaram em seis categorias as definições que os alunos tinham de função. A primeira categoria correspondia à definição correta propriamente dita (a definição de Dirichlet-Bourbaki). Na segunda categoria, os estudantes definiam função como sendo uma relação de dependência entre duas variáveis. Na terceira categoria, a função consistia numa regra que era expectável ter alguma regularidade (não considerando o aspeto arbitrário). Na quarta categoria, a função é dada como sendo uma operação ou uma manipulação. Na penúltima categoria, a função é uma fórmula, uma expressão algébrica ou uma equação. Por fim, na última categoria, os alunos identificam a função com um dos seus gráficos ou representações simbólicas, de um modo nada significativo. Estes autores salientaram que, muitas das vezes, não é por falta de conhecimento da definição de função que os alunos não se apropriaram corretamente dos conceitos associados, mas pelo contacto que têm com eles. Por exemplo, os autores denunciam o facto de os manuais exemplificarem e proporem tarefas nas quais as funções são dadas, apenas, por fórmulas.

1. Enquadramento teórico

Hitt (Hitt, 1998; Wang, Barmby, & Bolden, 2017) também analisou dificuldades que os alunos têm na aprendizagem do conceito de função. Baseando-se em vários estudos, categorizou em cinco níveis a compreensão do conceito de função, sendo que o fator novo que este autor traz a estes estudos é o facto de afirmar que esta categorização pode ser válida para outros conceitos na Matemática que não o conceito de função. Nesta categorização, no primeiro nível, o aluno tem ideias imprecisas acerca do conceito, tendo uma mistura incoerente das diferentes representações da função enquanto conceito. Num segundo nível, o aluno já consegue identificar diferentes representações do conceito e sistemas de identificação do mesmo. No nível seguinte, o aluno consegue traduzir de um sistema de representação para outro com preservação completa de significado. No quarto nível, o aluno tem a capacidade de articular coerentemente entre dois sistemas de representação. No último nível, o aluno consegue articular coerentemente entre diferentes sistemas de representação na resolução de uma tarefa.

Num estudo realizado por Panaoura, Michael-Chrysanthou e Philippou (2015) com alunos do ensino secundário, os resultados revelaram que os discentes tinham sérias dificuldades em propor uma definição para função ou uma tendência a, simplesmente, evitar por inteiro fazê-lo. Isto podia-se dever à sua possível crença de que apresentações informais ou intuitivas dos conceitos não podem fazer parte da sua aprendizagem matemática e, portanto, tomavam frequentemente como escapatória o uso de exemplos.

As múltiplas representações do tópico de Funções é uma das principais características deste tópico, veja-se os vários exemplos de tabelas gráficas, equações simbólicas e a própria verbalização. Mais ainda, é um dos aspetos importantes para compreensão das funções a conversão entre estas mesmas representações (Ayalon et al., 2017; Elia et al., 2007; Nitsch, Fredebohm, Bruder, Kelava, Naccarella, Leuders, & Wirtz, 2015; Panaoura et al., 2015). De uma forma muito simplista, uma representação é algo que toma o lugar de outra coisa, podendo as representações ser crenças individuais ou até conceções obtidas pelo indivíduo através de produções verbais ou esquemáticas (Duval, 2006). Ora, há, ainda, a tendência de identificar o conceito de função com a sua representação gráfica. A ambiguidade simbólica, cuja interpretação dependente do contexto, também pode ser um impasse para o aluno, uma vez que, por exemplo, y pode referir-se à ordenada de um certo ponto do sistema de coordenadas, ou pode estar a referir-se a um dado valor da função (Best & Bikner-Ahsbahs, 2017; Mourão, 2002; Saraiva et al., 2010; Sierpinska, 1992). Note-se que, de acordo com o

NCTM, uma representação “refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa de uma determinada forma e à forma, em si mesma” (Azevedo & Ponte, 2006, p. 75).

Azevedo e Ponte (2006) realizaram um estudo de caso de natureza qualitativa, dentro de um paradigma interpretativo, tendo como caso um aluno do 10.º ano de escolaridade do curso de Científico-Humanístico. Neste estudo, os autores procuraram compreender os processos de raciocínio usados na resolução de problemas, tarefas de exploração e de investigação sobre o tópico de Funções. Concluíram que, apesar de interpretar de forma adequada a informação dada pelas funções tanto na forma gráfica como verbal e de fazer a conversão da forma verbal para a numérica e para a gráfica, o aluno revelou dificuldades na conversão de representação gráfica para a algébrica, indiciando dificuldades no trabalho com expressões algébricas bem como o seu significado. Numa fase inicial do estudo, o aluno apresentou dificuldades na ligação da representação algébrica com outras formas de representar funções, parecendo que esta forma de representação se encontrava compartimentada. Os autores afirmaram que o trabalho simultâneo das diferentes representações durante a discussão de tarefas parece ter contribuído para a compreensão de todos eles, bem como da conversão entre si permitindo, deste modo, uma melhor compreensão dos problemas com funções. Também Brown (2007) afirma que o estudo das múltiplas formas de representação das funções é importante no Currículo de Matemática do ensino secundário.

Outras das dificuldades que os alunos revelam neste tema prendem-se com a dualidade do conceito de função, dado que uma função pode ser entendida numa perspetiva estrutural (como um objeto) ou numa perspetiva operacional (como um processo). Na mesma linha, Mourão (2002) aplica ao conceito de função a teoria de Anna Sfard relativamente à génese das noções matemáticas – a teoria da reificação. Esta teoria defende que, no modelo de desenvolvimento conceptual, existe uma dualidade de conceções – a conceção operacional e a conceção estrutural. A primeira precede cronologicamente a segunda no processo de aprendizagem de uma dada noção matemática, sendo que a estrutural apenas ocorrerá após uma transição árdua (O’Shea, Breen, & Jaworski, 2016).

Na conceção operacional, “as noções matemáticas são concebidas como um produto de certos processos ou são identificadas com os próprios processos” (Mourão, 2002, p. 275). Para uma dada noção, quando o aluno se encontra nesta fase, a sua aprendizagem não é suficiente. Na conceção estrutural, “a entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objeto real”, passando de um processo a um objeto abstrato autónomo (Sfard, 1991, citado por Mourão, 2002, p. 280).

A transição da conceção operacional para a conceção estrutural, para qualquer conceito matemático, é realizada em três fases: a interiorização, a condensação e a reificação. Na interiorização, “os processos são realizados em objectos matemáticos já familiares” ao aluno; na condensação, “os processos anteriores são transformados em unidades compactas autónomas” e na reificação “é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objectos permanentes por direito próprio.” (Mourão, 2002, p. 280).

Para que o aluno verdadeiramente aprenda, a reificação das conceções matemáticas é necessária. Caso contrário, a informação é tratada separadamente, dado que acaba por ser analisada “de uma forma enfadonha que pode levar a um maior esforço cognitivo e ao sentimento perturbador de uma compreensão só local e, por isso, insuficiente” (Sfard, 1987, citado por Mourão, 2002).

Quanto ao tema das Funções, algumas das dificuldades que evidenciam a não reificação é o conceber a função como um processo de cálculo; o facto de a função constante ser também uma função mesmo não dependendo de uma variável em termos de expressão analítica; aceitar a existência de função de correspondência arbitrária e há ainda uma tendência para identificar o conceito de função com uma sua representação específica (Mourão, 2002).

No caso particular da composição de funções, é necessário conceber a função enquanto processo (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, Deveies, John, Tolias, & Vidakovic, 1997). Tudo isto é relevante para o professor pois, segundo Ayers, Davis, Dubinsky e Lewin (1988), quando toma em consideração os processos mentais pelos quais ocorre a aquisição de novos conceitos poderá tornar mais frutuosa a aprendizagem.

No que refere ao tópico de composição de funções, Thomas (1971) verificou que, ao tentar hierarquizar em várias etapas a aprendizagem de acordo com a dificuldade que os alunos revelam, a composição encontra-se num dos níveis mais alto, sendo de grande de dificuldade para os alunos, de um modo geral. Também Ayers, Davis, Dubinsky e Lewin(1988) reconhecem que a composição de funções é um dos tópicos do *curriculum* onde os alunos apresentam mais dificuldades. Ainda assim, este é um dos conceitos com limitado número de referências na literatura (Lucus, 2006).

1. Enquadramento teórico

1.2. A motivação e a sua importância na aprendizagem

Wæge (2009) define motivação como um potencial de direcionar o comportamento e, portanto, pode manifestar-se através da cognição, da emoção e/ou do comportamento do estudante.

Vários estudos confirmaram a importância da motivação no processo de aprendizagem, atestando que a existência de motivação num aluno tem um impacto positivo no seu sucesso e *performance* académica (Deci, Vallerand, Pelletier, & Ryan, 1991; Schukajlow, Rakoczy, & Pekrun, 2017; Singh, Granville, & Dika, 2002).

Em particular, as emoções positivas, o interesse pela aprendizagem de um dado conteúdo, influenciam a criatividade dos alunos, a sua capacidade de resolução de problemas e a compreensão dos conteúdos de aprendizagem, contribuindo de forma significativa para bons resultados académicos (Schiefele & Csikszentmihalyi, 1995). Assim, não admira que Pakdel (2013) sublinhe que toda a problemática da motivação é fundamental para as organizações educacionais porque é um fator chave no processo de aprendizagem dos alunos.

Já Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideravam que uma das funções da escola é cultivar a motivação dos seus alunos e Deci, Vallerand, Pelletier e Ryan (1991) afirmaram que os sistemas escolares ideais são os que promovem nos alunos um entusiasmo genuíno pela aprendizagem, desempenho, assim como uma por vontade própria no envolvimento educacional. Ou seja, sistemas escolares ideais são aqueles que motivam os alunos a aprender.

Assim sendo, explore-se, primeiramente, um pouco o que significa motivação e a história deste conceito em termos de literatura.

Segundo Pakdel (2013), pode-se encontrar alguns registos sobre o conceito de motivação em Platão e Aristóteles. Na era moderna, Descartes distinguiu os fatores que influenciavam a motivação em fatores corporais e em fatores relacionados com a vontade do Ser Humano, denominando-os respetivamente de fatores inativos e ativos, sendo a primeira pessoa a atribuir, por completo, a motivação à vontade do homem.

Passe-se a analisar mais a fundo o que a literatura em vigor defende ser, de facto, motivação.

1. Enquadramento teórico

Numa visão mais antiga, motivação, "consiste numa mobilização energética que condiciona um individuo a comportar-se segundo a obtenção de uma finalidade." (Rodrigues, 1986, p. 61).

Esta definição tem por base uma teoria orientadora - *Behavioral theories of motivation* – subordinada ao paradigma de Pavlov que dominou a literatura durante a maior parte do século passado. De acordo com este paradigma, o comportamento observado é sempre uma resposta a um estímulo, sendo o comportamento humano o resultado de reflexos inatos e condicionados (Tavares, Pereira, Gomes, Monteiro, & Gomes, 2007). Apesar de se encontrarem em declínio os estudos assentes neste mesmo paradigma, esta orientação teórica providenciou um grande conhecimento sobre a motivação dos estudantes em Matemática (Middleton & Spanias, 1999) e, por essa mesma razão, se encontra aqui contemplada.

Uma outra teoria, a da autodeterminação (*self determination theory*, SDT), estuda, de um modo lato, a motivação do Ser Humano e a sua personalidade e não tanto os aspetos comportamentais como a anterior. Caracteriza-se por assumir que cada pessoa nasce com um desejo inato de ser estimulado e de aprender (Pakdel, 2013). Para esta teoria, a motivação interage, dinamicamente, com a satisfação de três necessidades psicológicas básicas: necessidades de competência, de autonomia e de pertença ou estabelecimento de vínculos (*relatedness*).

Segundo Ryan e Deci (2000), os criadores da teoria da autodeterminação, estar motivado significa estar movido para fazer algo, sendo que existem diferentes tipos de motivação de acordo com os objetivos que dão origem à ação, ou seja, ao porquê da ação. Assim sendo, distinguem motivação intrínseca e motivação extrínseca. Ou seja, motivação para fazer algo porque é interessante ou porque causa uma sensação de gozo ou motivação para fazer algo pois terá como consequência um resultado separado. Na primeira, o individuo atua pela diversão ou desafio, enquanto que na segunda será mais por estímulos externos, pressões ou recompensas.

Em termos educacionais, o aluno estuda porque desfruta do que está a fazer (motivação intrínseca), ou o aluno estuda uma vez que quer boas notas, ou agradar à família, ou entrar num dado curso, ou ser melhor do que um outro aluno (motivação extrínseca). A motivação intrínseca é a que dará origem a aprendizagem de maior qualidade e criatividade (Abuhamdeh & Csikszentmihalyi, 2012; Deci & Ryan, 2000; Lourenço & Paiva, 2010; Ryan & Deci, 2000; Schiefele & Csikszentmihalyi, 1995; Schukajlow et al., 2017).

1. Enquadramento teórico

Segundo Schiefele e Csikszentmihalyi (1995), tal motivação concorre para uma experiência de qualidade envolvendo emoções, como felicidade e alegria, e eficiência cognitiva (quando, por exemplo, o aluno se encontra concentrado) tendo um impacto positivo sobre alguns indicadores de saúde mental como a confiança, a calma, a responsabilidade, a criatividade e o sucesso (Deci et al., 1991; Pakdel, 2013).

Aliando ambas as teorias, para Middleton e Spanias (1999), as motivações são, de uma forma genérica, as razões que os indivíduos têm para se comportarem de uma dada forma numa dada situação. Tais razões pertencem às crenças de um dado individuo sobre o que é importante. Para estes autores, a motivação académica intrínseca também é o desejo do estudante para se envolver na aprendizagem pela aprendizagem em si. A motivação académica extrínseca é própria dos estudantes que se envolvem nas tarefas académicas com o objetivo de obterem recompensas ou para evitarem algum tipo de punição. Os estudantes intrinsecamente motivados desfrutam da participação nas tarefas académicas, sentem que aprender é importante para a imagem que têm deles próprios e procuram atividades académicas apenas pela alegria da aprendizagem. As motivações destes alunos tendem a focar-se em objetivos de aprendizagem. Os alunos intrinsecamente motivados destacam-se positivamente em relação aos alunos extrinsecamente motivados dado que estes tendem a centrar-se em objetivos de *performance*. O que se pode destacar em termos de sucesso educativo é que os estudantes intrinsecamente motivados tendem a exibir um número de comportamentos desejáveis como: persistência na fase de erro, processos mais elaborados e monitorização de compreensão, seleção de tarefas com maior grau de dificuldade, maior criatividade, capacidade de tomar mais riscos, seleção de estratégias mais profundas e eficientes, e escolha de uma atividade na ausência de recompensa extrínseca.

1.3. O GeoGebra

A tecnologia tem um papel significativo no desenvolvimento da humanidade (Gursul & Keser, 2009). Torna-se ainda mais óbvio que tal é verdade se se considerar que a oralidade e a própria escrita (o uso de papel e caneta) são tecnologias, até porque são instrumentos que não estiveram presentes ao longo de toda a história da humanidade (Borba & Penteado, 2016; Oliveira, 2017). Borba e Penteado (2016) vão ainda mais longe defendendo que não há produção de conhecimento sem algum tipo de tecnologia.

1. Enquadramento teórico

Mas nem sempre a Sociedade teve tantas e tão variadas tecnologias e tão disponíveis ao cidadão comum. Desde o século passado, que estas têm evoluído a um ritmo extremamente elevado (Pereira, 2008).

Em muitas partes do mundo atual, os cidadãos caracterizam-se por estarem completamente imbuídos numa realidade rica em *écrans*, seja de computadores, *tablets* ou telemóveis, não recorrendo muito ao papel (Freire & Lagarto, 2012).

Prensky (2006), mencionado por Carreira (2009), distingue as pessoas de hoje entre nativos digitais e os imigrantes digitais. Os primeiros são as novas gerações que, possivelmente, nasceram após o término da década de 80. Naturalmente, os nativos digitais recebem, no seu quotidiano, uma maior quantidade de informação num curto espaço de tempo, estando habituados a desdobrar-se em múltiplas tarefas em simultâneo, reunindo informação e organizando-a à sua maneira. Os imigrantes digitais são todos os excedentes, sendo a sua inserção nas tecnologias relativamente recente. Tendencialmente, não confiam por inteiro na tecnologia (Freire & Lagarto, 2012), preferindo o papel e a caneta ao teclado, tratar de um assunto de cada vez e o texto como fonte principal para a aprendizagem, por oposição a ilustrações e gráficos.

Os sistemas educativos não podem descurar esta realidade e muitos deles têm tomado medidas concretas.

A OECD (2015) afirma que as Políticas Educacionais que têm por objetivo embutir o uso das tecnologias nas escolas e nas práticas educacionais usam como argumentos que aquelas potenciam a experiência da aprendizagem para as crianças e adolescentes, e que podem ser um catalisador para uma maior mudança onde esta for mais desejada. Um outro argumento é o facto de ser necessário capacitar os alunos de competências digitais para uma Sociedade que cada vez mais depende de bens e serviços cuja produção depende de tecnologias. Por fim, também é empregue o argumento de que, ao assegurar que todos têm acesso e beneficiam das tecnologias, a divisão entre a população mais e menos favorecida é aproximada.

Oliveira (2017) defende que é inevitável associar o uso de algumas tecnologias ao processo de ensino e de aprendizagem e que não devemos temer o uso de novas tecnologias no ensino, pois, tal como a escrita não erradicou a oralidade, estas não irão exterminar o que existe, irão, sim, permitir uma reorganização do pensamento (Borba & Penteado, 2016).

1. Enquadramento teórico

Relativamente ao primeiro argumento, segundo Melo, Amorim e Barros (2012), ao inserir-se as tecnologias, como o é o computador, em sala de aula, o aluno é impulsionado a interagir com os objetos da aprendizagem, aprendendo de forma ativa, sendo que o professor passa a uma posição de orientador.

No caso específico do ensino secundário, Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao e Maschietto (2016) analisaram a literatura existente quanto à influência das tecnologias digitais na aprendizagem e, suportando-se em três estudos quantitativos recentes de revisão em grande escala, concluíram que a tecnologia pode ter um efeito positivo na aprendizagem. Mas a presença de tecnologia digital não garante, por si só, melhorias na prática educativa ou na aprendizagem dos alunos. Para tal é imprescindível que o professor esteja bem atento ao currículo, aos aspetos científicos, didáticos e tecnológicos, dimensões aglutinadas na expressão TPACK. O TPACK – *technological pedagogical contente knowledge* – consiste numa moldura teórica para a exploração da tecnologia em educação que sugere que o ensino com tecnologias ideal encontra-se na interseção de três pilares centrais: conhecimento científico, conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico (Tzavara, Komis, & Karsenti, 2018). Está, também, nas mãos do aluno aceitar ou não o desafio (Drijvers et al., 2016; Melo, Amorim, & Barros, 2012; OECD, 2015). Nestas condições, "o emprego correto da tecnologia no ensino (…) torna atrativa e estimulante a interação do discente com o conteúdo, o que é essencial para a aprendizagem" (Melo et al., 2012, p. 233). A intenção não é economizar no desenvolvimento teórico, mas proporcionar ocasiões para um contacto desafiante com a teoria e sua aplicação permitindo que o aluno lide com as dificuldades próprias da matéria (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006; Silva et al., 2012). Por isso, Weigand (2017) afirma que um dos tópicos que, por excelência, deve ser explorado por tecnologias, como o GeoGebra, é o tópico das funções.

Relativamente à Matemática, com a inserção de tecnologias na sala de aula, segundo Carreira (2009), a natureza da própria atividade matemática é modificada, pois, como a própria autora afirma, não somente assistem ou ajudam nos procedimentos matemáticos como também alteram a essência do que o aluno faz com ela.

Ao falar sobre a inserção de instrumentos tecnológicos em sala de aula, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) afirmam que estes são um ponto de partida ou suporte de algumas tarefas escolares, alertando que se tratam de um meio e não de um fim.

1. Enquadramento teórico

Weigand (2017), baseando-se em literatura recente, sintetizou que as tecnologias digitais permitem uma maior variedade de estratégias no que toca aos processos de resolução de problemas. O autor ainda ressalta que as tecnologias digitais permitem problemas de modelação mais realistas em sala de aula, aumentando o nível cognitivo quanto à compreensão destes problemas, e exigem e nutrem estratégias de argumentação avançada. São um grande catalisador para trabalho individual ou em grupo e não conduzem a um défice nas capacidades do uso papel-e-lápis ou nas capacidades mentais, desde que aconteçam frequentemente nas aulas.

Caridade (2012) evidencia as vantagens das tecnologias quando o seu o uso tem em consideração o desenvolvimento do raciocínio estratégico, do espírito crítico e da discussão de ideias entre grupos de trabalho, dentro dos grupos, com a turma inteira ou com o professor.

Documentos mais recentes a nível internacional ressaltam o uso de tecnologia nas aulas de Matemática pela sua capacidade de apresentar múltiplas representações e fácil transição entre elas, por favorecer a interatividade com objetos matemáticos, uma melhor visualização dos conceitos e incentivarem o levantamento de conjeturas (Duarte, 2008).

De acordo com Bauer (2013), as representações desempenham um papel importante na aprendizagem e no uso da Matemática "são a chave para a aprendizagem conceptual e determinam muitas vezes o que é aprendido" (Saraiva, Teixeira, & Andrade, 2010, p. 3).

Os manipulativos digitais têm ainda a vantagem de permitirem interrelacionar diferentes partes da Matemática (Carreira, 2009).

Assim, não admira que, em Portugal, no Programa Curricular de Matemática A do ensino secundário (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012) se leia que "a tecnologia no Ensino Secundário deve (…) ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos" (p.28), é de notar que "temas já conhecidos – como Funções – podem ganhar uma nova perspectiva quando computadores e calculadoras se tornam atores no cenário da sala de aula" (Borba & Penteado, 2016, p. 34).

Só na última década, o crescimento dos recursos para a educação matemática tem sido tão elevado, tanto ao nível de *softwares* como de *hardwares*, que proporcionou oportunidades de mudar a natureza do ensino e da aprendizagem no ensino secundário (Drijvers et al., 2016).

1. Enquadramento teórico

De acordo com Bakar, Ayub e Mahmud (2015), existem dois tipos principais de *softwares* que podem servir de apoio ao ensino e à aprendizagem de Matemática - os sistemas de álgebra computacional e *softwares* de geometria dinâmica. O inicial opera com símbolos de modo a representar conceitos matemáticos abstratos, enquanto que o segundo se foca nas relações entre conceitos geométricos, como o são, por exemplo, pontos, linhas e círculos. Nesta última categoria, encontra-se o GeoGebra uma das ferramentas que tem deixado a sua marca nos últimos anos.

O GeoGebra é um *software* que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter com o intuito de ser expressamente aplicado em Matemática. Apesar de ter sido criado no âmbito de uma dissertação de mestrado, em 2001 e de ter sido publicado o seu primeiro protótipo em 2002, acabou por se desenvolver de tal forma que, já em março de 2008, a respetiva página *Web* contou com cerca de 300 000 visitantes de 188 países e uma estimativa de 100 000 professores que aplicaram o GeoGebra em sala de aula. Para isso, muito contribuiu o apoio gratuito de vários programadores e professores que investiram no desenvolvimento de materiais que implicam o uso do GeoGebra em sala de aula (Preiner, 2008).

O GeoGebra tem todos os ingredientes para a aplicação em contexto educativo porque o seu ambiente gráfico é de uso muito intuitivo, a sua distribuição é completamente gratuita, tem compatibilidade para qualquer sistema operativo e está disponível em várias línguas, inclusive português. Este *software* encontra-se, ainda, na categoria de *software* de *Open source*, ou seja, é um *software* que permite alterar o próprio código base.

Apresenta uma interface dinâmica que reúne Geometria, Álgebra, e Cálculo Diferencial e Integral, sendo constituída por uma janela gráfica que se desdobra em uma área de desenho, uma janela de álgebra e um campo de entrada de comandos (Silva et al., 2012). Segundo Amorim, Barros e Melo (2012), este *software* apresenta uma interface amigável e de fácil manuseio. É um *software* extremamente dinâmico dada a possibilidade de trabalhar com objetos livres e dependentes. Pela sua simplicidade e potencialidade, este *software* tem deixado a sua marca a nível mundial na aplicação em ensino de matemática. Inclusivamente, foi galardoado com vários prémios ao nível educacional, entre os quais o *Tech Award* 2009: *Laureat in the Education Category* e BETT *Award* 2009: *Finalist in London for British Educational Technology Award*.

King e Schattschneider (2003) afirmam que "O GeoGebra, *software* de cariz predominantemente construtivista, constitui, (…) um excelente recurso para o estudo da

Geometria, pois possibilita ao aluno visualizar, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa.” (Silveira & Cabrita, 2013, p.152). Por isso, segundo Arbain e Shukor (2015), o GeoGebra deve de ser aproveitado ao máximo pelos professores, para que os seus alunos explorem o mundo da Matemática e desenvolvam a capacidade de pensar de um modo mais criativo e crítico (Arbain & Shukor, 2015).

Mais especificamente, segundo Hohenwarter e Jones (2007), parafraseados por Bakar, Ayub e Mahmud (2015), os utilizadores podem usar o GeoGebra para modelar vários fenómenos e para compreender as relações entre diferentes tipos de representação matemática, como tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas (Abrantes et al., 1999; Caridade, 2012). A representação algébrica mostra as coordenadas, ou uma equação implícita ou explícita, ou uma equação na forma paramétrica, enquanto que a representação geométrica ilustra o conjunto de soluções correspondente (Preiner, 2008). Esta possibilidade de confrontar uma função com as suas várias representações enriquece a aprendizagem do aluno uma vez que “é a diversidade das representações que dá significado a um objeto matemático, desde que cada representação represente e descreva diferentes aspetos do objeto” (Azevedo & Ponte, 2006, p. 3).

2. Método de investigação

Recorde-se que os objetivos de investigação neste Relatório são analisar em que medida o GeoGebra, quando explorado pelos alunos complementarmente à utilização das ferramentas tradicionais (papel e lápis), contribui para uma mais sólida construção e aplicação de conhecimentos relativos à composição de funções e se constitui um fator motivante para a aprendizagem.

Neste capítulo, apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas assumidas neste trabalho, caracterizam-se os participantes no estudo e as técnicas e instrumentos de recolha de dados, explicita-se a estrutura geral da investigação e as fases de estudo. Este capítulo termina com a clarificação da forma como se trataram os dados e como são apresentados os resultados.

2.1. Opções metodológicas

Sendo um paradigma um "conjunto articulado de postulados, de valores conhecidos, de teorias comuns e de regras que são aceites por todos os elementos de uma comunidade científica num dado momento histórico" (Coutinho, 2011, p. 5), existem, nas ciências sociais e humanas, três paradigmas de investigação predominantes. Estes são o paradigma positivista, o construtivista e o paradigma sociocrítico.

Este estudo insere-se num paradigma construtivista que, segundo Coutinho (2011), num nível concetual, investiga ideias, descobre significados nas ações de cada sujeito e nas interações sociais a partir da perspetiva de cada interveniente. Em termos ontológicos, este paradigma não adota uma posição única e objetivista, mas uma posição relativista, o que coloca o investigador numa situação de perceção do limite próprio (o investigador está sempre ciente dos preconceitos que traz consigo), o que, por sua vez, leva o investigador a ter um maior cuidado a nível investigativo (Coutinho, 2011). O paradigma construtivista, como é denominado mais recentemente, também é conhecido por hermenêutico ou naturalista.

O método, segundo Bisquerra (1989), citado por Coutinho (2011), é o conjunto de procedimentos que servem de instrumentos para concretizar os objetivos da investigação.

2. Método de investigação

Perante os objetivos deste estudo, este Relatório segue essencialmente um método qualitativo. No entanto, também foram recolhidos dados quantificáveis para uma melhor compreensão do fenómeno em estudo. Este estudo é qualitativo também por estar inerente a subjetividade no ato de investigar, assim como a opção por uma visão abrangente do fenómeno que está a ser investigado (Holanda, 2006).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), um estudo inserido num método qualitativo permite um *insight* mais completo dos participantes e de todos os fenómenos estudados. Para estes mesmos autores, uma investigação qualitativa prende-se com algumas características muito próprias que permitem este mesmo *insight*. Entre elas destaca-se o facto de o investigador colocar em primeiro lugar o processo por oposição dos resultados finais. Uma outra característica é que a fonte direta dos dados é o ambiente natural, o que, naturalmente, promove a captação dos fenómenos na sua complexidade. Este tipo de investigação é descritiva, o que é crucial a uma análise profunda da realidade. Uma outra característica listada, que é de importância fulcral, é o facto de o significado (dos dados recolhidos) tomar um papel principal na investigação qualitativa. Dadas todas estas facetas da investigação qualitativa, reforçam-se os motivos para a escolha do método qualitativo nesta investigação.

Novamente pelos objetivos que se delinearam, a investigação em causa usa como *design* o estudo de caso. Mais especificamente, trata-se de um estudo de caso múltiplo.

Segundo Yin (2015), o estudo de caso, seja ele único ou múltiplo como no presente trabalho, é preferível quando as principais questões de investigação se prendem com o "como?" e o "porquê?", quando um investigador tem um reduzido controle sobre eventos comportamentais e quando o foco do estudo é um fenómeno contemporâneo.

Neste Relatório, o estudo empírico foi pensado e realizado com o intuito de tentar compreender como é que os 'casos' reagiram à abordagem da composição de funções por recurso ao GeoGebra, tentando-se uma interpretação de tal reação. A segunda condição acima mencionada também se verifica uma vez que a professora de investigação não exerceu qualquer controle sobre a situação para além da inerente à função de ser professor. Por fim, o foco do estudo deste Relatório é um fenómeno contemporâneo por se usar o GeoGebra como forma de combater a desmotivação que ainda impera a Matemática e as dificuldades inerentes ao estudo da composição de funções.

Em termos de propósito, este estudo é simultaneamente exploratório, descritivo e analítico. Inscreve-se numa tipologia descritiva, pois tenta ser respondida a questão de 'como é?’. Este estudo ainda pode ser considerado analítico porque confronta a teoria já existente e é exploratório pela inexperiência da investigadora (Ponte, 2006).

2.2. Participantes no estudo

O trabalho empírico desenvolveu-se numa instituição educacional no norte litoral de Portugal, no distrito de Aveiro, no ano letivo 2015/2016. Esta escola é uma escola pública que leciona o 3.º ciclo do ensino básico e o ensino secundário.

No que toca às suas instalações, durante o 1.º período letivo e parte do 2.º, a Escola encontrava-se em renovação, o que implicou que os alunos tivessem, em geral, aulas nos denominados “contentores”. Estes foram salas de aula um tanto ou quanto improvisadas, mas que tinham todas as condições necessárias a um bom ambiente de ensino e aprendizagem, chegando mesmo a ter sistema de ar condicionado. Apesar da recolha de dados ter sido realizada enquanto as aulas decorriam nos contentores, a recolha de dados da primeira aula foi realizada numa sala normal apetrechada de computadores (sala esta requisitada previamente para o efeito).

Os participantes deste estudo foram os alunos de uma turma de 11.º ano do curso Científico-Humanístico e a investigadora, que se enquadram na tipologia de participantes diretos. Como participantes indiretos ainda se encontra a professora orientadora da prática pedagógica, a professora titular da turma e outra aluna de mestrado. Esta turma corresponde a uma das turmas com a qual a investigadora realizou a sua prática pedagógica no âmbito do mestrado em Ensino de Matemática. Este estudo foi realizado no âmbito da disciplina de Matemática A, disciplina esta pertencente ao conjunto de disciplinas obrigatórias do curso destes mesmos alunos.

A turma era composta por 23 alunos, sendo 13 do sexo feminino e 10 do sexo masculino. A idade média destes alunos, na altura da realização deste estudo, era de 15 anos. O comportamento dos alunos na aula de Matemática era muito divergente, alguns mostravam genuíno interesse e empenhavam-se, enquanto que alguns alunos revelavam-se desinteressados, não se envolvendo nas tarefas que a professora titular de turma proponha nas aulas.

2. Método de investigação

A maioria dos alunos desta turma teve contacto prévio com o GeoGebra em múltiplas situações, sendo que os restantes alunos que não se encontravam nesta situação foram incluídos em grupos com pelo menos um elemento que já tinha trabalhado com o GeoGebra.

2.2.1. Os casos

Os 'casos' em estudo consistiram em cinco grupos de alunos - b, d, g, i e j - sendo que todos os grupos exceto o penúltimo tinham dois elementos e este tinha três. Na tabela seguinte, encontram-se os elementos de cada grupo, sendo que, para todos os elementos, deram-se nomes fictícios de modo a preservar anónima a identidade dos alunos.

Grupo	Elementos
b	Rogério Ronaldo
d	Cassandra Carla
g	Beatriz Bianca
i	Neusa Natália Nilce
j	Lucas Linda

Estes casos foram selecionados devido a vários fatores. O grupo b foi selecionado dado revelar-se um caso típico em comparação com a *performance* da maior parte dos grupos da turma.

Os grupos d e g foram selecionados dado que revelaram ser casos exemplares (pela positiva) em relação aos restantes grupos (no que diz respeito às resoluções das tarefas recolhidas).

Os grupos i e j foram selecionados dado integrarem alunos que revelaram bastante desmotivação na disciplina de Matemática. O Lucas, um dos elementos do grupo i, era um aluno que revelava bastante desmotivação nas aulas de matemática. O outro elemento, a

Linda, pelo contrário, era uma aluna que sempre se empenhava nas tarefas que lhe eram propostas durante as aulas, no entanto, por vezes, tinha algumas dificuldades em acompanhar o ritmo de aula.

Do grupo i, um elemento era muito desmotivado durante as aulas – a Nilce, sendo que apresentava dificuldades a Matemática em comparação com a restante turma.

2.3. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Para que seja possível formar uma imagem o mais completa possível da realidade em estudo, foram recolhidos dados muito variados, como é próprio de um estudo de caso qualitativo.

Neste estudo, as principais técnicas de recolha de dados consistiram na observação, recolha documental e inquirição, apoiadas por diários de bordo, produções dos alunos relativas a fichas de tarefas, documentos do GeoGebra, testes e respostas a um questionário.

2.3.1. Observação

A observação realizada foi direta e participante (Savenye & Robinson, 2004; Yin, 2015), suportada por um diário de bordo, no qual se registaram todos os acontecimentos considerados relevantes para o estudo.

Este tipo de observação é vantajosa por permitir obter informações internas aos grupos de alunos (que não tão detetáveis em técnicas como entrevistas), nomeadamente informações não-verbais, e às dinâmicas entre grupos, sendo que a credibilidade dos dados é maior por serem obtidos em primeira mão (Aires, 2015; Bell, 2010).

Segundo Ponte (2002), o diário de bordo é o local onde o professor regista acontecimentos importantes, as ideias e as preocupações que lhe vão surgindo no decurso da aula. De acordo com este autor, o diário de bordo é um espaço independente que permite ao investigador um distanciamento dos acontecimentos e, deste modo, dos seus próprios preconceitos.

2.3.2. Recolha documental

Para além da observação, existem outras formas de recolher informação acerca dos comportamentos humanos que caem, grosseiramente, na categoria de recolha de documentos e artefactos (Savenye & Robinson, 2004).

2. Método de investigação

A recolha documental envolveu os documentos manuscritos e digitais produzidos pelos alunos nas duas aulas relativas ao estudo, assim como a resolução de uma tarefa inscrita num dos testes que os alunos realizaram.

2.3.2.1. Documentos e artefactos produzidos pelos alunos

Recolheram-se quatro documentos de cada elemento dos grupos, sendo que dois foram recolhidos na primeira aula e ouros dois na segunda.

Na primeira aula, cujo plano se encontra no Apêndice I, cada um dos elementos do grupo entregou, em suporte papel, a resolução do guião de tarefas presente no Apêndice II. Também foi entregue a sua resolução em suporte digital, mas esta foi entregue por grupos. Na segunda aula, cujo plano se encontra no Apêndice III, cada um dos membros do grupo entregou a resolução de uma tarefa do manual que tinha sido requerida como trabalho de casa (Apêndice IV), assim como a resolução da ficha de tarefas (Apêndice V) resolvida no decurso dessa mesma aula.

2.3.2.2. Teste

Neste estudo, foi recolhida a resolução de uma das tarefas do teste de avaliação dos alunos. Este teste foi aplicado posteriormente às duas aulas em que se recolheram os restantes dados. Este teste tem duas versões, sendo que o enunciado desta tarefa, para ambas as versões, encontra-se no Apêndice VI. As duas versões divergiam, essencialmente, na ordem das composições de funções que os alunos deveriam tratar. Esta tarefa subdividia-se em dois pontos.

2.3.3. Inquirição

Neste estudo, inquiriram-se os alunos por questionário. Um instrumento de recolha de dados como é o questionário permite preencher lacunas e esclarecer inconsistências, trazendo à luz alguns dos fatores que influenciam e dirigem os alunos (Holanda, 2006).

Foi aplicado um questionário no final da segunda aula a todos os alunos da turma presentes. O questionário (Apêndice VII) permitiu obter informação sobre o decorrer geral das duas aulas tendo como foco principal analisar a motivação dos alunos e é composto por um total de cinco perguntas, sendo que a primeira é de escolha múltipla e as seguintes de resposta aberta. A primeira contempla uma escala de 1 a 5, onde 1 refere-se a discordo totalmente e o 5 a concordo totalmente e considera os seguintes pontos: “Com esta estratégia aprendi.”, “Esta estratégia foi divertida.”, “Esta estratégia foi interessante.”, “Esta estratégia foi desmotivante.”, “Esta estratégia foi confusa.”, “Com esta estratégia não entendi o que era suposto fazer.” e “Com esta estratégia eu empenhei-me no que me foi proposto.”. As restantes perguntas quatro perguntas foram “Destaca os aspetos mais positivos desta estratégia:”, “Destaca os aspetos menos positivos desta estratégia:”, “Usa alguns adjetivos para descrever esta forma de aprender:” e “Acrescenta alguma sugestão e/ou comentário que consideres pertinente:”.

2.4. Descrição do estudo

De uma forma geral, este estudo começou com uma fase inicial em que se escolheu o tema e se procedeu à análise do estado da arte respetivo, presente no capítulo do Enquadramento Teórico. De seguida, procedeu-se à escolha do método e elaboraram-se instrumentos de recolha de dados. A fase posterior envolveu a escolha das categorias para a análise de conteúdo, a planificação das duas aulas nas quais o estudo foi desenvolvido e a preparação das respetivas tarefas a aplicar. Depois, implementaram-se as aulas tendo-se recolhido os dados necessários ao estudo. Seguidamente, analisaram-se os resultados e, por fim, teceram-se as conclusões finais.

Analise-se, agora, de uma forma mais pormenorizada, as etapas essenciais do estudo empírico.

Numa primeira etapa, a turma participou numa aula (cujo plano se encontra no Apêndice I), orientada de forma a que os alunos trabalhassem no GeoGebra e preenchessem um guião de tarefas (Apêndice II). Genericamente, a turma realizou um conjunto de tarefas de âmbito exploratório por recurso ao GeoGebra sendo que, no final da aula, foram recolhidos os documentos digitais produzidos por cada grupo, assim como os guiões preenchidos individualmente por cada aluno.

Esta primeira aula centrava-se na composição de funções. Pretendia-se que fosse, inicialmente, explorada pelo aluno por recurso ao GeoGebra, sem que, de facto, tivesse ocorrido uma sua abordagem formal prévia.

A aula foi planificada e concretizada de modo a que os alunos realizassem as tarefas a pares, sendo que apenas um dos grupos tinha três elementos.

Em ambas as aulas, os alunos foram colocados a trabalhar em grupos pois, como Carreira (2009) coloca bem, o que faz sentido num mundo tão impregnado de tecnologias é

2. Método de investigação

"Trabalhar em grupos, desenvolver projectos, favorecer a partilha e a troca, permitir a exploração de todas as ferramentas disponíveis, colocar questões interessantes, propor desafios." (p. 62).

O guião foi desenhado de modo a que as funções pudessem ser exploradas nos seus vários tipos de representação (representação algébrica, representação gráfica e tabela numérica), dado que "É aconselhável que o professor proponha tarefas matemáticas que permitam aos alunos explorar, analisar e comparar os vários tipos de representações." (Saraiva et al., 2010, p. 2).

O guião era composto por duas tarefas que seguiam a mesma estrutura geral. A diferença reside nas funções presentes no enunciado: para a primeira tarefa, considerou-se as funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$ enquanto que, para a segunda, considerou-se as funções $h(x) = x^3$ e $l(x) = \frac{1}{x}$. Em cada uma das duas tarefas, foram exploradas ambas as funções compostas das funções dadas - fog, gof, hol e loh respetivamente. Estas funções (f, g, h e l) foram escolhidas porque, por um lado, os alunos já as conheciam e, por outro, têm particularidades no seu domínio e contradomínio que permitem uma exploração mais rica das funções compostas (especialmente na periodicidade da função f). As funções também foram selecionadas de modo a que as duas funções compostas possíveis variassem quanto à comutatividade. No caso da primeira tarefa, não eram comutativas mas eram no caso da segunda (isto é, $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x}) \neq \sqrt{\cos(x)} = (gof)(x)$, no entanto $(hol)(x) = \frac{1}{x^3} = (loh)(x)$). Deste modo, os alunos facilmente averiguavam que as duas funções compostas possíveis entre duas funções diferentes não eram necessariamente iguais.

Para explorar cada função composta foi, num primeiro passo, construído um ponto móvel desta mesma função. Para isso, inicialmente, construiu-se um seletor a, que permite que uma constante real varie entre um mínimo e um máximo estabelecido (ver figura 1). No enunciado, pediu-se que considerassem uma variação -10 a 10.

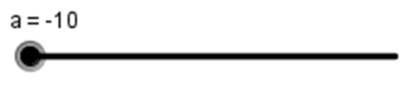


Figura 1 - Seletor no GeoGebra

2. Método de investigação

De seguida, considerando, por exemplo, a função composta fog da questão 1.1, os alunos construíram o ponto $T = (a, f(g(a))$ (no caso de gof, foi construído o ponto $R = \left(a, g\left(f(a)\right)\right)$; 1.2, no caso de hol, foi construído o ponto $T = \left(a, h\left(l(a)\right)\right)$ e, no caso de loh, foi construído $R = \left(a, l\left(h(a)\right)\right)$). Isto sem antes ter desenhado a representação gráfica de fog. Deste modo, poderiam explorar o significado por detrás da sua construção e, inclusivamente, domínios e contradomínios. Os alunos podiam fazer variar as abcissas dos pontos com o seletor e explorar o que acontecia. Podiam observar, na Folha Algébrica, várias situações com os pontos que foram considerando. No caso da abcissa ser negativa, seguem-se três exemplos na figura seguinte.

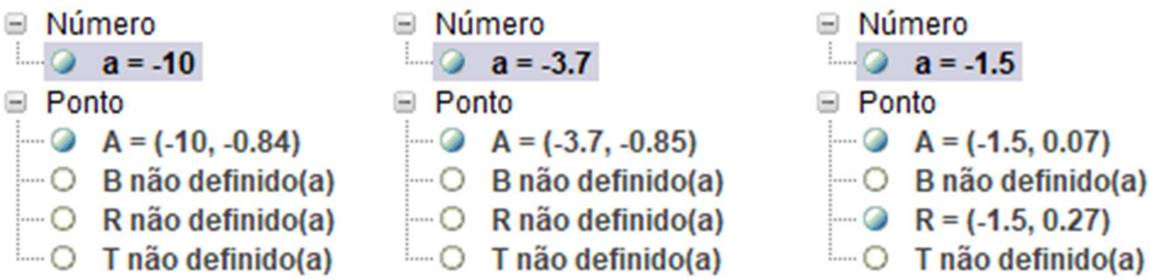


Figura 2 - Coordenas dos pontos (definidos) com abcissa negativa - 1.1 (do guião da primeira aula)

Na figura em cima, constam também os pontos A e B, isto porque, em passos intermédios, nas questões 1.1 e 1.2, foram construídos pontos com as coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (a, g(a))$. Estes pontos A e B são pontos móveis (usa-se também o seletor para se obterem variações entre as abcissas -10 e 10) da função f e g, respetivamente. O guião foi construído de modo a integrar esta construção pois, deste modo, seria mais fácil interpretar o que se pretendia ao construir os pontos T e R (os pontos das funções compostas).

Em cada passo, os alunos foram incentivados a explorar, tal como se pode ver no exemplo da figura anterior, especialmente movendo o seletor e observando o que acontece consequentemente. Na alínea a) da questão 1.1, o guião pede aos alunos que movam o seletor e façam, inclusive quando a abcissa é negativa.

O ponto R ($gof = \sqrt{\cos(x)}$) só está definido para as mesmas abcissas em que o ponto A tem imagem não negativa. Portanto, os alunos teriam de concluir que para todas as abcissas que verificassem que $\cos(x) \in]-1, 0[$, $\sqrt{\cos(x)}$ não está definido. De modo semelhante à questão 1.1, para explorar o ponto R, na alínea a), o guião pede aos alunos que movam o seletor e façam as suas observações. A segunda secção pede especificamente que concluam o que acontece no caso do intervalo $[2, 4]$, que é um dos intervalos para o qual o ponto R não está definido.

Para cada uma das funções compostas, depois de se construir o ponto móvel T (para o caso das questões 1.1 e 2.1) ou R (para o caso das questões 1.2 e 2.2), os alunos preenchiam uma tabela (ver figura seguinte). Na última coluna, para cada uma das abcissas da primeira coluna, deveriam registar a ordenada do ponto T para as questões 1.1 e 2.1 e do ponto R para as questões 1.2 e 2.2, os valores de abcissa dados foram diferentes.

a	*f(a)*	*w=g(a)*	*Ordenada de T f(w)*
1			
-1			
2			

---------			
x			

Figura 3 - Representação da função composta fog em tabela - b) de 1.1 (do guião da primeira aula)

Na alínea c) de cada questão (para a questão 1.1, fog; para a 1.2, gof; para a 2.1 hol e para 2.2, loh), o aluno tinha de determinar a respetiva expressão algébrica. Como se pode verificar pela figura anterior, na última linha de cada tabela, o aluno tinha de, indiretamente, determinar a expressão algébrica.

Nas questões 1.3 e 2.3 os alunos tinham de representar as funções compostas determinadas (no caso da questão 1.3, tinham de desenhar na folha gráfica do GeoGebra fog e gof; no caso da questão 2.3, tinham de desenhar hol e loh), completando, assim, a exploração de todas as representações das funções compostas consideradas.

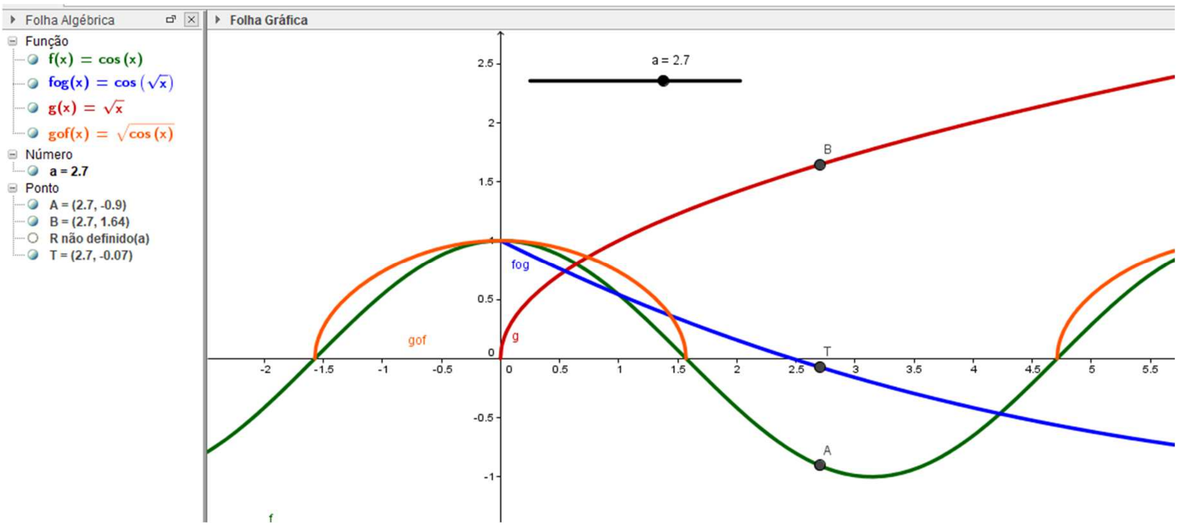


Figura 4 - Resolução final da primeira tarefa (um exemplo)

Devido à demora dos alunos na resolução das tarefas desta primeira aula, apenas se cumpriu o planificado até à resolução das mesmas. Ainda assim, a maioria dos alunos explorou as duas funções compostas da primeira tarefa, avançando muito no conceito de função composta e respetivo domínio. A planificação da segunda aula foi alterada devidamente.

Como trabalho de casa, foi proposto aos alunos que resolvessem uma tarefa do manual (Apêndice IV), resolução que foi recolhida no início da aula de Matemática seguinte.

Nessa aula (cujo plano se encontra no Apêndice III), após uma revisão do que foi abordado na aula anterior, foi formalizado o conceito de composição de funções. De seguida, a turma realizou a ficha de tarefas (Apêndice V) em grupos, cuja resolução foi recolhida.

Na primeira tarefa da ficha entregue, os alunos tiveram de determinar a expressão algébrica de uma função composta. Nesta tarefa, os alunos tinham de saber interpretar corretamente o enunciado, o qual foi escolhido de forma a que os alunos pudessem ter contacto com uma aplicação real deste conceito.

Na segunda tarefa, os alunos tinham de explorar uma função composta mas, antes, tinham de determinar a expressão algébrica de duas funções. Terá sido aqui que os alunos despenderam de mais tempo, pois consideraram o enunciado confuso.

Na última questão desta tarefa, não só o aluno tinha de determinar a expressão algébrica da função composta considerada como tinha de determinar qual o seu significado no contexto dado. Deste modo, mais uma vez, os alunos tinham de interpretar, numa situação real, a função composta considerada.

Na terceira tarefa, a dificuldade residia em interpretar corretamente a simbologia que é usada nas funções compostas, desta vez, fazendo uso das representações gráficas das funções a compor, no lugar das funções algébricas.

A quarta tarefa considerava duas funções, f e g, pedindo a caraterização das funções compostas fog, gof e fof. Inicialmente, os alunos determinaram os domínios das funções dadas e, depois, para cada uma das funções compostas, determinaram a expressão algébrica, o domínio e o contradomínio. Pela primeira vez, os alunos foram confrontados com a existência de uma função composta por ela própria, tendo de se abstrair e aplicar diretamente o que aprenderam no momento inicial da aula, com a formalização dos conceitos.

Na quinta tarefa, que os alunos não conseguiram resolver por completo, ou não de todo, devido à falta de tempo, tinham de explorar as condições do domínio da função composta considerada e concluir que esta não poderia existir.

Com esta ficha de tarefas, nesta segunda aula, pretendia-se analisar a forma como os alunos se apropriaram dos conceitos associados à composição de funções, perante o contacto que tinham tido na aula anterior.

No final da aula, os alunos responderam a um questionário (Apêndice VII), cujas respostas essas que foram recolhidas para análise posterior. O questionário sondou a perceção geral dos alunos no que toca às duas aulas deste estudo, averiguando também qual o empenho que cada um colocou nas mesmas. Com este questionário, também se tentou classificar qualitativamente a motivação dos alunos.

Em ambas as aulas, contou-se com a colaboração da professora titular da turma e da colega de estágio.

Numa etapa final, foi recolhida a resolução de uma tarefa (que envolvia a composição de funções) no teste de avaliação que a turma realizou (Apêndice VI).

2.5. Tratamento de dados e apresentação de resultados

Neste subcapítulo, aborda-se a maneira como os dados recolhidos foram tratados e a forma como serão apresentados os resultados.

As produções dos alunos (relativas às tarefas quer manuscritas quer digitais e ao trabalho de casa) foram inicialmente classificadas (quantitativamente) para se ter uma visão global dos resultados obtidos. A grelha geral de classificação dos dados encontra-se no Apêndice VIII.

Os critérios de avaliação da primeira tarefa em suporte papel encontram-se no Apêndice IX e da segunda tarefa encontram-se no Apêndice X. Os critérios de avaliação da primeira tarefa em suporte digital encontram-se no Apêndice XI e, para a segunda tarefa, encontram-se no Apêndice XII. Os critérios de avaliação do trabalho de casa entregue na segunda aula encontram-se no Apêndice VI. No que se refere à segunda aula, os critérios de avaliação da ficha de tarefas encontram-se no Apêndice XIII.

Todos os dados recolhidos foram submetidos aos critérios de avaliação respetivos, porém apenas os casos selecionados foram submetidos a uma análise mais rigorosa. Assim, posteriormente, passou-se para uma análise de conteúdo mais exaustiva, orientada pelas categorias/subcategorias de análise que dizem respeito aos seguintes conteúdos: expressão algébrica da função composta, respetivo domínio e contradomínio (que envolve também ambos os domínios das funções a compor), assim como a comutatividade de funções compostas.

Outra categoria considerada foi a motivação, tendo-se também analisado a visão dos alunos sobre o seu empenho durante o estudo empírico.

Em relação ao capítulo seguinte, estrutura-se pelos diversos grupos que foram escolhidos para casos (grupos b, d, g, i e j). Contudo, antes de se analisar cada um destes casos, por uma questão de contextualização, são primeiro apresentados os resultados gerais de toda a turma.

Para cada um dos grupos-caso, descreve-se, por ordem cronológica, como evoluíram relativamente à apropriação e aplicação de conceitos relativos à composição de funções – expressão algébrica, domínio, contradomínio e conhecimentos base necessários aos mesmos (nomeadamente a determinação de domínio de funções). Explica-se, ainda, através da análise dos questionários e de algumas passagens dos diários de bordo, qual a opinião acerca da influência de utilização do GeoGebra na motivação para a aprendizagem.

No próximo capítulo, as afirmações relativas a cada caso serão ilustradas, principalmente, por digitalizações das produções dos alunos. Como é próprio de uma investigação que se pauta por um paradigma construtivista, estas afirmações têm por base uma análise de dados de caráter descritivo e interpretativo.

3. Análise de resultados

Neste capítulo, apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos durante ambas as aulas lecionadas, a primeira com o apoio ao GeoGebra, e durante o teste.

Por uma questão de contextualização, primeiramente apresenta-se os resultados da turma por inteiro. De seguida, analisam-se os resultados caso a caso.

A estrutura geral, seja ao analisar a turma por inteiro, seja num dos casos selecionados, primeiramente encontra-se a análise da composição de funções e depois da motivação.

3.1. A turma

Por uma questão de contextualização, como foi referido, encontra-se neste capítulo a análise dos resultados para a turma inteira.

3.1.1. Composição de funções

Aqui encontra-se a análise do guião de tarefas da primeira aula, primeiro as resoluções em suporte digital e depois em suporte papel, seguido da análise das resoluções dos trabalhos de casa, terminando com a análise das resoluções da ficha de tarefas da segunda aula.

Na primeira aula, os alunos resolveram o guião (Apêndice II), tanto no GeoGebra como em suporte papel.

A maioria dos alunos apenas resolveu a primeira tarefa, sendo que apenas três grupos entregaram a resolução digital da segunda tarefa. Dos onze grupos que se formaram no seio da turma, seis grupos criaram documentos no GeoGebra completamente corretos. Dois grupos não representaram as duas funções compostas e os restantes dois grupos falharam em não representarem uma destas. Um único grupo cometeu um erro ao criar o ponto T, dando-lhe as coordenadas da seguinte forma $\mathrm{T} = \left(a, f(a)g(a)\right)$, quando deveria de ser $\mathrm{T} = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$.

Dos três grupos que realizaram em suporte digital a tarefa 2 do guião, apenas dois realizaram a questão 2.1 (Apêndice XVI). O único grupo que realizou a segunda tarefa até ao final representou incorretamente a função correspondente à questão 2.1.

Tal como na resolução em suporte digital, na primeira aula, a maioria dos grupos apenas resolveu a primeira tarefa, sendo que apenas três grupos tentaram responder a algumas das alíneas da tarefa 2 (Apêndice XVII). Estes grupos foram o grupo a, o g e o d. O grupo a foi o único que preencheu toda a tarefa 2. Ainda assim, este grupo determinou incorretamente uma das funções compostas, o que influenciou as questões 2.2 e 2.3. Os grupos d e g preencheram parte da 2.1.

Nome	Grupo	1.1 (70%)	1.2 (10%)	1.3 (20%)	Total
Maria Mariana	a	70	10	20	100
Rogério Ronaldo	b	70	10	0	80
António Antero	c	70	10	10	90
Cassandra Carla	d	70	10	20	100
Francisco Fernando	e	70	10	20	100
Pedro Paulo	f	70	10	10	90
Beatriz Bianca	g	70	10	20	100
Rita Rúben	h	70	10	20	100
Neusa Natália Nilce	i	70	10	0	80
Lucas Linda	j	65	10	20	95
Catarina Cátia	k	70	10	0	80

Tabela 1 -Grelha de classificação final para a primeira tarefa do guião de tarefas em suporte digital

A maioria dos alunos, na resolução da tarefa 1, detetou que T= $\left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ não estava sempre definido para todos os valores de a. Alguns alunos chegaram a destacar que coincide quatro vezes com o ponto A, fazendo apenas referência ao que conseguiam ver no monitor, mas revelando que não se apercebiam por completo da razão pela qual tal acontece.

Com a exceção de um grupo, todos os outros reconheceram que T não está definido para valores negativos de a. O grupo que acabou por ser a exceção, não respondendo diretamente a esta alínea, é também o grupo que definiu T como $\left(a, f(a)g(a)\right)$, tanto no documento em GeoGebra como no guião.

Todos os alunos identificaram corretamente a expressão algébrica da função composta presente na questão 1.1 (fog). Já na alínea c) de 1.2, nove alunos não conseguiram identificar corretamente a expressão algébrica da função composta. Um destes alunos identificou erradamente esta função por escrever da seguinte forma $\sqrt{x} \times \cos(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

Quanto aos domínios de ambas as funções compostas, para a função composta presente em 1.1, apenas dois grupos não resolveram corretamente e somente um aluno não considerou o intervalo fechado em zero. Um dos grupos que não determinou corretamente este domínio parece apenas considerar o que viram no monitor, uma vez que determinou que este acabava em dez. O outro grupo (o que considerou que T= $\left(a, f(a)g(a)\right)$) tentou determinar o domínio por interseção de ambos os domínios de f e de g, fazendo-o com vários erros de simbologia: $D_g \cap D_f = x \geq 0 \cap \mathbb{R} = x \geq 0$.

A grelha de classificação final correspondente a esta parte (relativamente à turma inteira) encontra-se no Apêndice XVII.

Entre as duas aulas seguidas em que se deu este estudo, foi requerido aos alunos que resolvessem uma tarefa do manual como trabalho de casa (Apêndice IV). Analisa-se, de seguida, as produções recolhidas.

Todos os alunos, com a exceção de um dos membros do grupo a, resolveram a tarefa. Em geral, os alunos não apresentaram dificuldades nesta tarefa, sendo que quatro apresentaram a tarefa corretamente resolvida (figura seguinte). A aluna que não entregou o trabalho de casa pertencia ao único grupo que conclui o guião da primeira aula. O outro membro deste grupo obteve a classificação mais baixa por não explicitar os passos devidamente. Os restantes alunos cometeram um erro a desdobrar uma condição proveniente do uso do Teorema de Pitágoras (os alunos indicavam algo como $d^2 = h^2 + 150^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{h^2 + 150^2}$, não contemplando a resposta negativa quando usaram o símbolo '⟺', nem justificando porque razão é que poderiam fazê-lo). No total, 16 alunos cometeram este único erro na resolução deste trabalho de casa sendo que, de forma geral, os alunos conseguiram aplicar parte do que foi abordado na primeira aula.

3. Análise de resultados

Nome	Grupo	7.1 (50%)	7.2 (50%)	Total
Maria	a	Não entregou	Não entregou	Não entregou
Mariana		40	35	75
Rogério	b	50	50	100
Ronaldo		30	50	80
António	c	35	50	85
Antero		35	50	85
Cassandra	d	35	50	85
Carla		35	50	85
Francisco	e	35	50	85
Fernando		35	50	85
Pedro	f	35	50	85
Paulo		35	50	85
Beatriz	g	35	50	85
Bianca		35	50	85
Rita	h	35	50	85
Rúben		35	50	85
Neusa	i	50	50	100
Natália		35	50	85
Nilce		35	50	85
Lucas	j	35	50	85
Linda		35	50	85
Catarina	k	50	50	100
Cátia		50	50	100

Tabela 2 - Grelha de classificação final para a tarefa de trabalho de casa

Na segunda aula, foi entregue, preenchida e recolhida a resolução de uma ficha de tarefas (Apêndice V). Na figura seguinte encontra-se a grelha de classificação geral da ficha de tarefas.

3. Análise de resultados

Nome	Grupo	1 (15%)	2 (30%)			3 (15%)	4 (25%)		5 (15%)	Total
			a) (10%)	b) (10%)	c) (10%)		a) (10%)	b) (15%)		
Maria	a	15	10	3	3	15	10	9	0	65
Mariana		15	10	3	3	15	10	3	0	59
Rogério	b	15	10	10	0	15	0	0	0	50
Ronaldo		15	10	10	0	15	0	0	0	50
António	c	15	8	5	3	15	0	0	0	46
Antero		15	10	5	0	15	0	0	0	45
Cassandra	d	15	10	5	0	15	10	0	0	55
Carla		15	10	10	0	15	0	0	0	50
Francisco	e	15	10	10	3	0	0	0	0	38
Fernando		15	10	0	0	0	0	0	0	25
Pedro	f	15	10	0	0	0	10	0	0	35
Paulo		15	10	0	0	0	10	0	0	35
Beatriz	g	15	0	0	0	15	10	3	0	43
Bianca		15	0	0	0	15	10	3	0	43
Rita	h	15	8	0	0	0	10	6	0	39
Rúben		15	0	2	0	0	10	6	0	33
Neusa	i	15	5	0	0	15	10	3	0	48
Natália		15	5	0	0	15	10	3	0	48
Nilce		15	0	0	0	15	10	2	0	42
Lucas	j	15	10	5	0	15	10	0	0	55
Linda		15	10	0	0	15	10	6	0	56
Catarina	k	15	10	5	0	0	10	0	0	40
Cátia		15	10	5	0	0	10	0	0	40

Figura 5 - Grelha de classificação da ficha de tarefas da segunda aula

Em relação à primeira tarefa da ficha, todos os alunos conseguiram resolver corretamente com a ajuda da investigadora. Na segunda tarefa, os alunos tiveram dificuldade em interpretar o enunciado, sendo que a última alínea revelou-se difícil para muitos dos alunos.

Na terceira tarefa, de escolha múltipla, a grande maioria dos alunos preencheu corretamente, sendo que dois alunos anotaram a lápis corretamente a definição de função composta no ponto pretendido, mas resolveram incorretamente trocando o valor da ordenada pelo da abcissa.

Na quarta tarefa, subdividida em duas alíneas, a maioria dos alunos resolveu corretamente a primeira. Porém, todos os alunos mostraram dificuldade na resolução da segunda. Assim sendo, a maioria dos alunos soube determinar os domínios das funções dadas, como já tinham aprendido em sala de aula, porém, muitos não tentaram caracterizar as funções compostas. Uma das razões para tal foi a evidente falta de tempo devido ao facto de terem demorado muito na interpretação do enunciado da tarefa 2. Dez dos alunos iniciaram a caracterização de ambas as funções compostas, sendo que a maioria destes apenas determinou os domínios. Ao fazê-lo, os alunos empregaram corretamente a definição de domínio de função composta evidenciando que a compreenderam melhor do que a própria expressão algébrica. Dada a dificuldade da determinação do domínio da função composta ser muito superior à determinação da expressão algébrica da mesma, alguns dos alunos poderão não ter interpretado corretamente o enunciado, considerando que era apenas necessário o domínio, dado que este era, de facto, a parte mais complexa do que lhes estava a ser pedido.

A maioria dos alunos não chegou a resolver a tarefa 5 uma vez que, no decurso geral da aula, despenderam muito tempo nas tarefas anteriores, especialmente na interpretação do enunciado da segunda tarefa. Somente cinco alunos começaram a tentar resolver esta tarefa, sendo que optaram por determinar a expressão algébrica da função composta, quando a tarefa pedia a determinação do domínio.

Num dos testes de avaliação posterior às duas aulas em que se realizou este estudo, uma das tarefas abordou a composição de funções. As resoluções desta tarefa foram recolhidas para análise neste estudo.

Três dos alunos resolveram a tarefa corretamente em toda a sua extensão, enquanto que dois alunos faltaram ao teste. A média de cotação desta tarefa dos alunos que resolveram o teste, em percentagem, foi de aproximadamente 70% (figura seguinte). Podemos ainda verificar que os alunos aparentam terem-se apropriado da composição de funções. De um modo geral, não apresentaram qualquer tipo de dificuldades na determinação da expressão algébrica da função composta. No entanto, ainda apresentaram dificuldades na determinação do domínio da função composta e alguns erros em termos do uso de linguagem simbólica no âmbito da teoria de conjuntos.

3. Análise de resultados

Nome	Grupo	Expressão algébrica (50%)	Domínio (50%)	Total
Maria	a	50	50	100
Mariana		50	0	50
Rogério	b	50	18	68
Ronaldo		40	33	73
António	c	Faltou	Faltou	0
Antero		50	46	96
Cassandr	d	50	35	85
Carla		50	20	70
Francisco	e	49	9	58
Fernando		10	15	25
Pedro	f	Faltou	Faltou	0
Paulo		49	0	49
Beatriz	g	49	19	68
Bianca		50	43	93
Rita	h	50	50	100
Rúben		50	47	97
Neusa	i	0	20	20
Natália		50	49	99
Nilce		50	20	70
Lucas	j	50	50	100
Linda		40	21	61
Catarina	k	50	0	50
Cátia		0	25	25

Tabela 3 - Grelha de classificação final da tarefa do teste

3.1.2. Motivação

Pelas respostas aos questionários, pode-se perceber qual a opinião dos alunos que participaram neste estudo relativamente a ambas as aulas lecionadas (ver figura seguinte). Na sua maioria, consideraram que aprenderam (91,31%) e se empenharam (todos eles referiram que se empenharam, sendo que 26,09% afirma ter-se empenhado muito em ambas as aulas). Dado que os alunos iniciaram a primeira aula sem a formalização dos conceitos explorados, alguns alunos sentiram-se um pouco confusos (65,23%). Ainda assim, de um modo geral, muitos alunos afirmaram que compreenderam o que era necessário fazer ao longo das aulas (56,53%).

Analisando o lado mais emocional, 73,91% dos alunos consideraram a sua experiência divertida e uma grande maioria caracterizou-a como interessante (95,65%). Uma arrebatadora maioria da turma classificou a sua experiência como motivadora (95,66%), sendo que uma grande parte referiu muito motivadora (47,83%).

3. Análise de resultados

	Discordo (%)				Concordo (%)
	1	2	3	4	5
Com esta estratégia aprendi	0	8,7	43,48	39,13	8,7
Esta estratégia foi divertida	0	26,09	34,78	26,09	13,04
Esta estratégia foi interessante	0	4,35	39,13	34,78	21,74
Esta estratégia foi desmotivante	47,83	30,44	17,39	4,35	0
Esta estratégia foi confusa	4,35	30,44	30,44	21,74	13,04
Com esta estratégia não entendi o que era suposto fazer	30,44	13,04	21,74	30,44	4,35
Com esta estratégia eu empenhei-me no que me foi proposto	0	0	13,04	60,87	26,09

Tabela 4 - Tabela síntese de parte do questionário empregue (valores arredondados às centésimas)

Neste questionário, os alunos também caracterizaram as duas aulas do estudo. Passa-se a listar quais os adjetivos positivos usados: inovadora (este foi o adjetivo mais usado - 13 alunos), interessante, diferente, divertida, motivadora, dinâmica, apelativa, lúdica, criativa, esclarecedora e simples. Também foi salientado como elemento positivo a possibilidade de trabalhar em grupo, a interação com a tecnologia e “trabalhar diretamente com o que se está a aprender”. Quanto aos aspetos negativos, alguns alunos disseram que foi um pouco confuso, sendo que três alunos acharam alguns enunciados de difícil interpretação, um dos alunos achou que o tempo pré-determinado de resolução das tarefas era muito reduzido e um outro aluno sentiu dificuldade por já não se recordar muito bem dos comandos do GeoGebra.

Assim sendo, de um modo geral, os alunos deram um parecer muito positivo sobre as duas aulas, aparentando-se interessados e motivados.

3.2. Grupo b

Este grupo era constituído pelos alunos Rogério e Ronaldo. Ambos os membros deste grupo eram elementos que se envolviam nas aulas de matemática, se bem que muito mais o Rogério que o Ronaldo sendo que, inclusivamente, o Rogério era um dos dois alunos da turma com melhores classificações. Normalmente, estes alunos sentavam-se lado a lado nas aulas e tinham uma atitude em sala de aula muito silenciosa e empenhada. Ambos os alunos eram intrinsecamente motivados dado que para cada tarefa que a professora titular de turma propunha na sala de aula de Matemática envolviam-se com interesse.

3.2.1. Composição de funções

Na figura seguinte, apresentam-se as classificações de todas as tarefas do guião da primeira aula, separado em suporte digital e em suporte papel, do trabalho de casa, da ficha da segunda aula e do teste.

nome	grupo	Primeira aula				Trabalho de casa	Segunda aula	Teste
		Tarefa 1		Tarefa 2			Ficha de tarefas	
		produção digital (GeoGebra)	produção escrita	produção digital (GeoGebra)	produção escrita			
Rogério	b	80%	82%	0%	0%	100%	50%	68%
Ronaldo			83%		0%	80%	50%	73%

Tabela 5 - Classificações gerais - grupo b

Pelo documento produzido pelos alunos no GeoGebra, pode-se verificar que as construções gerais foram concretizadas corretamente, tal como a maioria dos restantes grupos, sendo que os alunos deste grupo apenas não construíram as representações gráficas das funções compostas (questão 1.3).

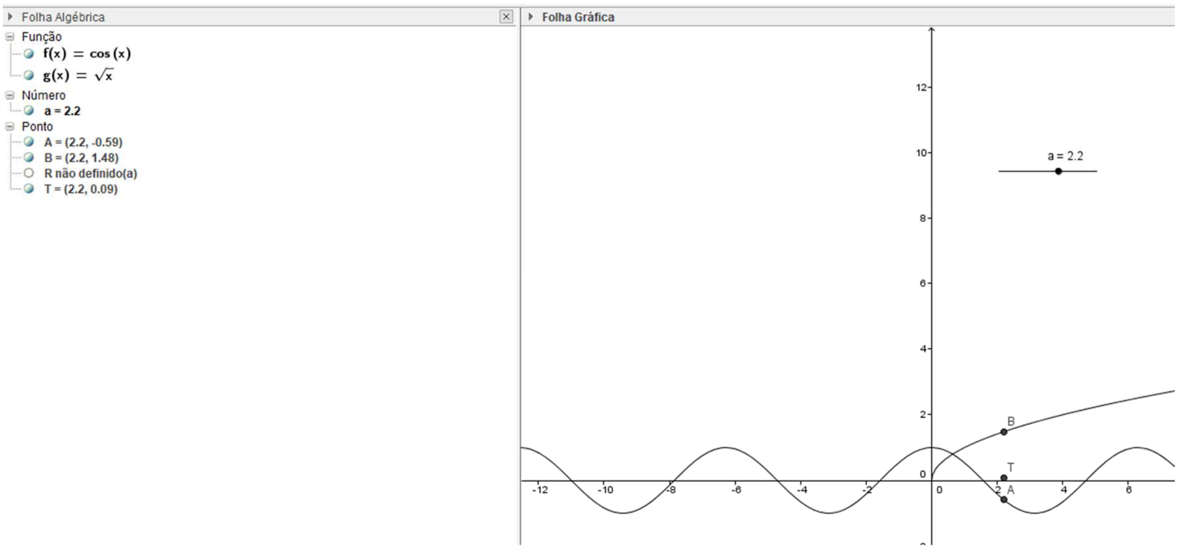


Figura 6 - Resolução no GeoGebra da primeira tarefa - grupo b

3. Análise de resultados

Quanto às diversas construções, os alunos construíram corretamente o seletor, estabelecendo o respetivo mínimo e máximo como foi pedido (entre -10 e 10) e dando à respetiva variável (variável que modifica com o seletor) o nome a como também foi requerido. O ponto A foi construído corretamente ($A = (a, f(a))$), assim como o ponto B ($B = (a, g(a))$). Portanto os alunos construíram adequadamente os dois pontos que percorriam, respetivamente, as representações gráficas das funções f e g. Quanto aos dois pontos das funções compostas possíveis com ambas as funções f e g com a abcissa a variar com os seletores – T e R, os alunos não apresentaram dificuldade, construindo corretamente $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ e $R = \left(a, g\left(f(a)\right)\right)$. Os alunos tiveram alguma dificuldade a interpretar corretamente a alínea a) da questão 1.1, alínea esta que pedia o primeiro ponto (T) de uma função composta mas, depois de pedirem ajuda, conseguiram facilmente realizar estas construções. Como já foi mencionado, os alunos tiveram dificuldade na construção das representações gráficas, não chegando a apresentá-las no GeoGebra.

Agora, analisa-se a resolução das tarefas em suporte papel.

Em relação à tarefa inicial, na questão 1.1, que trata a função composta $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x})$ e que pretendia que os alunos observassem o comportamento dessa mesma função através da manipulação da variável a do seletor criado no GeoGebra e descrevessem o que se verifica (em particular para o caso em que a é negativo), os alunos aperceberam-se de que o ponto T= $\left(x, \cos\left(\sqrt{x}\right)\right)$ só está definido para abcissas positivas (ver figura seguinte).

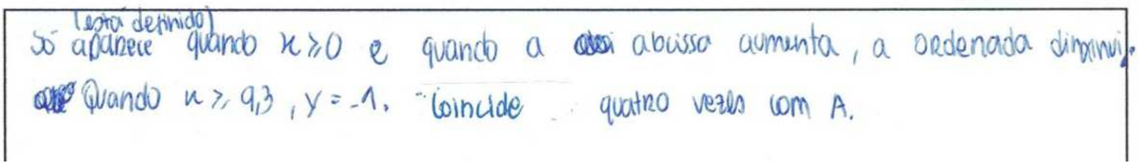

(está definido)
Só aparece quando $x \geq 0$ e quando a abcissa aumenta, a ordenada diminui.
Quando $x \geq 9,3$, $y = -1$. coincide quatro vezes com A.

Figura 7 - Resolução de parte da alínea a) de 1.1 (guião de tarefas) – Rogério - grupo b

Porém, este grupo afirmou erroneamente que, quando a abcissa de T aumenta, a respetiva ordenada diminui. Curiosamente, este grupo, olhando para o monitor, concluiu que T e A= $(x, \cos(x))$ coincidem quatro vezes, o que é verdade para o zoom em que se encontrava a janela do GeoGebra. Contudo, bastava que os alunos tivessem deslocado a janela do GeoGebra para verificarem que tal não acontece meramente quatro vezes. Nesta mesma questão do guião, os alunos apresentaram uma outra afirmação errada - "Quando $x \geq$

9,3, $y = -1$”. Estas duas últimas observações denotam alguma dificuldade na compreensão da situação mais geral de como os pontos foram construídos, isto é, dado que os pontos T e R são pontos das funções compostas fog e gof respetivamente, pela forma como foram definidos os alunos parecem não se ter, ainda neste momento da aula, inteirado do conceito de função composta. Note-se que tanto o Rogério como o Ronaldo deram exatamente a mesma resposta. Aliás notou-se, ao longo de toda a aula, que este grupo trabalhou bem entre si e todo o guião foi preenchido em conjunto.

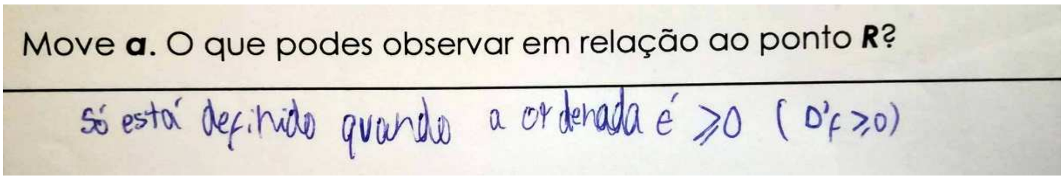
Ainda na questão 1.1, os alunos constataram corretamente que o ponto T não se encontrava definido para abcissas negativas.

Ambos os alunos não apresentaram dificuldades na representação numérica, através de uma tabela, das funções f, g e, principalmente, fog.

Quanto à expressão algébrica da função fog, os alunos determinaram-na corretamente. Isto é um pouco contraditório com a resolução em GeoGebra, pois o grupo determinou corretamente, para ambas as funções compostas, a expressão algébrica em suporte papel, porém não representou graficamente qualquer destas no GeoGebra. Uma das razões para tal poderá ser que os alunos não perceberam que a determinação do ponto T permitia uma generalização da função composta fog. Como a passagem (requerida no guião) da representação por tabela para a expressão algébrica foi tão natural (o enunciado foi cuidadosamente pensado para tal), talvez os alunos tivessem a ideia de que a resposta não poderia ser óbvia. Por outro lado, como estas representações são apenas pedidas na última questão e como os alunos também não tentaram fazer qualquer outra alínea, o que poderá ter acontecido é que não tiveram tempo para concluir. De qualquer modo, o facto de os alunos terem determinado a própria expressão algébrica de fog revela a capacidade de raciocínio dos alunos, que mobilizaram os seus conhecimentos prévios e ao explorarem o GeoGebra resolveram uma tarefa que envolvia conceitos não aprendidos formalmente ainda.

Após terem determinado a expressão algébrica de fog, os alunos determinaram, também corretamente, o respetivo domínio $D = \mathbb{R}_0^+$, evidenciando, também pela resposta à alínea a), que mesmo sem a formalização de como determinar o domínio de uma função composta conseguem mobilizar conceitos prévios com o recurso ao GeoGebra e determiná-lo.

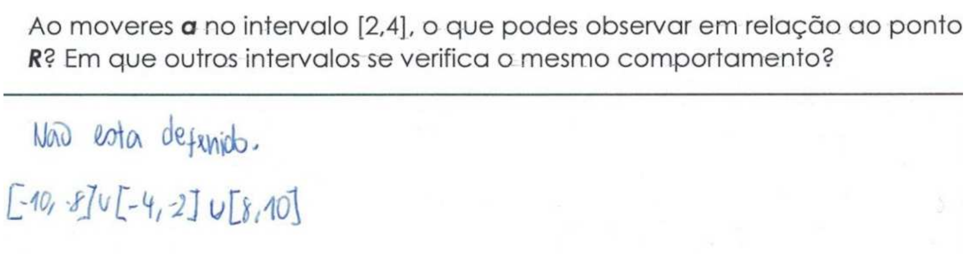
Ainda na tarefa 1, na questão 1.2, que trata a função composta $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$, o grupo b afirmou que esta função apenas está definida para ordenadas não negativas, como se pode verificar na figura seguinte. Apesar dos alunos terem constatado corretamente que o contradomínio é não negativo, o grupo não justificou por completo a razão pela qual gof não tem um domínio contínuo.


Move **a**. O que podes observar em relação ao ponto **R**?

Só está definido quando a ordenada é ≥0 (D'f ≥0)

Figura 8 - Resolução de parte da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) – Ronaldo - grupo b

Este grupo, ao ser-lhes pedido para indicarem para que intervalos (para além de [2,4]) a função $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$ não está definida, de uma forma diferente dos restantes elementos da turma, apresentou um único intervalo que é a união de três intervalos separados onde, de facto, gof não está definida, como se pode verificar na ilustração seguinte.


Ao moveres **a** no intervalo [2,4], o que podes observar em relação ao ponto **R**? Em que outros intervalos se verifica o mesmo comportamento?

Não esta definido.

[-10,-8]∪[-4,-2]∪[8,10]

Figura 9 - Resolução de parte da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) – Rogério - grupo b

Os alunos representaram corretamente, na forma de tabela, as funções f, g e gof. Também, como já foi mencionado, representaram corretamente a expressão algébrica da composta gof. Apesar disto, o grupo não tirou qualquer conclusão quanto ao respetivo domínio quando tal lhes foi pedido, pois terá acabado a aula entretanto. Assim sendo, este grupo não resolveu a questão 1.3 nem preencheu a tarefa 2, devido à falta de tempo.

Analise-se, agora, o trabalho de casa recolhido entre ambas as aulas deste estudo.

O Ronaldo conseguiu resolver corretamente quase todo o trabalho de casa, fazendo apenas um erro, provavelmente por distração, no desenvolvimento da equação da alínea 7.1 (como se pode ver na figura seguinte o aluno obteve a expressão $d = \sqrt{2250 + h^2}$ quando a expressão que deveria obter seria $d = \sqrt{22500 + h^2}$).

3. Análise de resultados

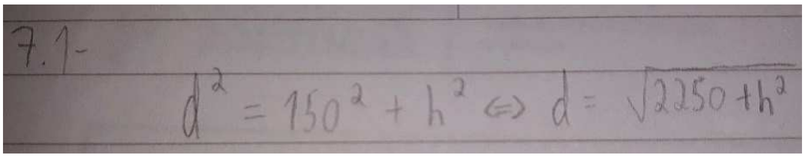


Figura 10 - Resolução da alínea 7.1 (trabalho de casa) -Ronaldo - grupo b

Assim sendo, o aluno evidenciou saber determinar a expressão algébrica de uma função composta num contexto real, mesmo sem existir ainda a formalização do contexto.

O Rogério, como se pode verificar pela figura seguinte, resolveu corretamente a tarefa por inteiro, evidenciando ter compreendido como se determina a expressão algébrica de uma função composta.

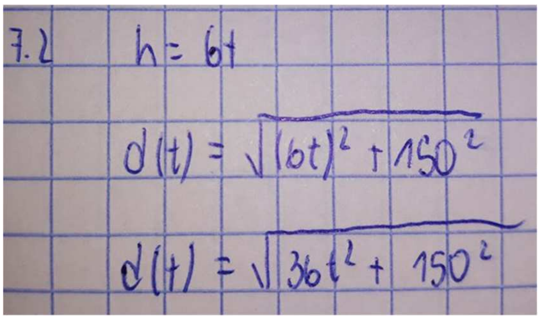


Figura 11 - Resolução da alínea 7.2 (trabalho de casa) -Rogério - grupo b

Analise-se, agora, as resoluções deste grupo da ficha de tarefas da segunda aula. Os dois alunos entregaram duas fichas separadas cuja resolução era quase igual (dado que, como a professora investigadora pediu, todos os alunos mantiveram-se nos mesmos grupos para a segunda aula).

A tarefa 1 foi realizada corretamente, como se pode averiguar na figura seguinte, o que mostra que os alunos se apropriaram de como determinar a expressão algébrica de uma função composta, aplicando-a num contexto real.

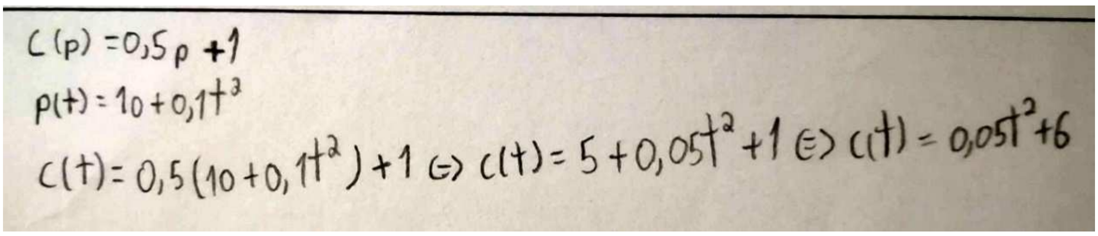


Figura 12 - Resolução da tarefa 1 (ficha de tarefas) -Ronaldo - grupo b

3. Análise de resultados

Pode-se verificar que, na tarefa 2, ilustrada na figura seguinte, os alunos compreenderam qual a função pretendida na alínea inicial e aperceberam-se de que têm de fazer uso do Teorema de Pitágoras para a alínea b). Porém, executaram incorretamente, errando num sinal e tendo um erro de notação pelo meio. Quanto à alínea c), apesar de interpretarem corretamente a função pedida, os alunos não determinaram corretamente a sua expressão algébrica. Também na alínea b) os alunos evidenciam terem-se apropriado de como determinar a expressão algébrica de uma função composta. Tal é contraditório com a alínea c), no entanto como se pode averiguar no diário de bordo os alunos não compreenderam o enunciado desta tarefa achando-o um pouco confuso.

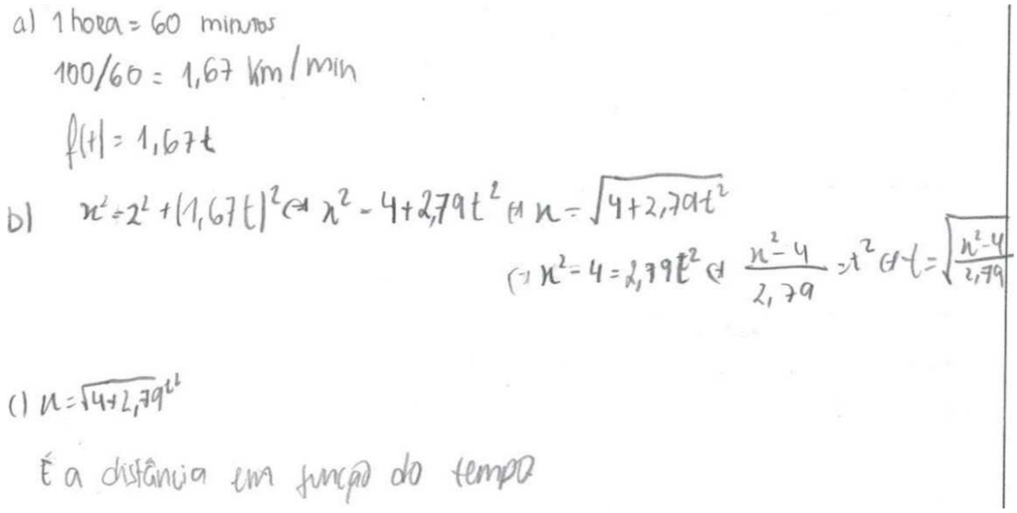


Figura 13 - Resolução da tarefa 2 (ficha de tarefas) -Rogério - grupo b

Este grupo resolveu corretamente a tarefa 3, de direta aplicação da função composta num dado ponto, o que mais uma vez evidencia terem-se apropriado de como determinar a expressão algébrica de uma função composta. Quanto às tarefas 4 e 5, novamente, os alunos não as preencheram devido ao tempo que despenderam na resolução da tarefa 2, como a professora investigadora pôde averiguar durante a aula.

Analise-se, agora, a resolução da tarefa dos testes recolhida.

A resolução do teste mostrou à vontade na determinação da expressão algébrica da função composta por ambos os alunos deste grupo.

Um dos elementos do grupo escreveu a definição de domínio não completamente correta, deixando transparecer a ideia essencial mas falhando em algum do formalismo. Pela resolução (ilustrada na figura seguinte), o aluno percebeu como calcular, de um modo geral, o domínio de uma função composta, contudo teve dificuldade na determinação do conjunto solução da inequação $\frac{x}{x-2} \geq 1$.

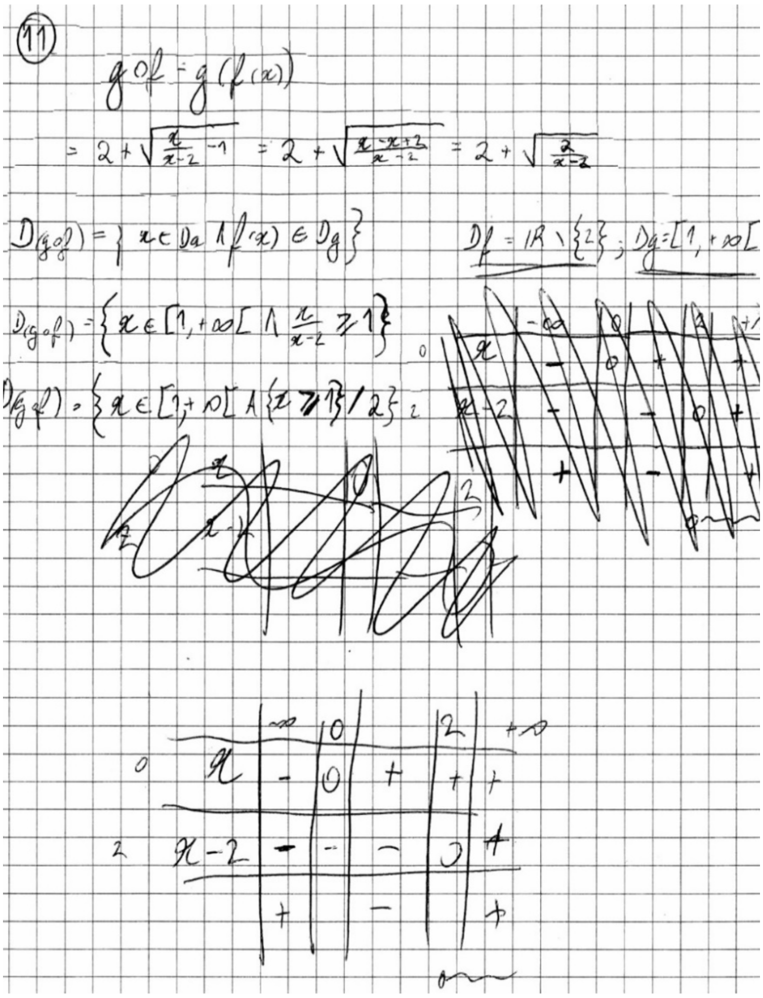


Figura 14 – Resolução do Rogério - grupo b – à questão do teste

O outro elemento do grupo determinou o domínio corretamente, sendo que apenas não foi muito formal na apresentação de certos passos intermédios (ver figura seguinte).

3. Análise de resultados

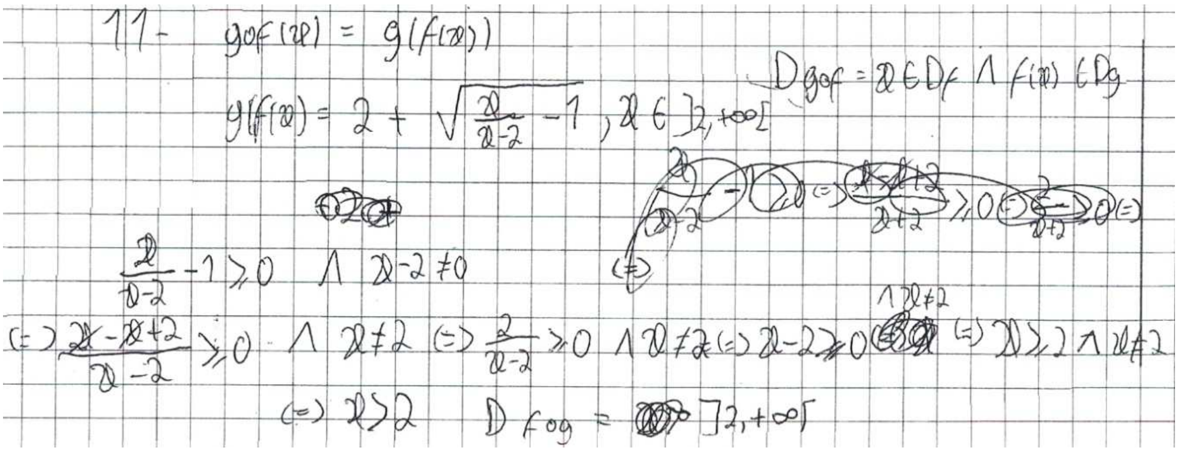


Figura 15 - Resolução do Ronaldo - grupo b – à questão do teste

Uma vez que as resoluções no teste apenas apresentam erros marginais ao tópico, ambos os membros deste grupo revelaram compreender o conceito de composição de funções na sua íntegra.

3.2.2. Motivação

Neste espaço, analisa-se a motivação dos alunos ao longo das aulas pelos diários de bordo e os questionários.

Ao longo das duas aulas deste estudo, ambos os alunos se envolveram na resolução das tarefas, interessando-se e tirando dúvidas quando era necessário. Este comportamento já é normal a ambos os alunos, pois como já foi mencionado ambos são intrisecamente motivados. Em comparação com as aulas normais de Matemática, a única diferença que se pôde observar foi o terem requisitado mais vezes a ajuda da professora para esclarecer as dúvidas, o que é normal dado a ambas as aulas serem ricas em resolução de tarefas.

Analisam-se, agora, os questionários preenchidos por ambos os membros do grupo b. O questionário foi preenchido no final das duas aulas em que este estudo foi realizado de modo a que as respostas dos alunos contemplem o estudo na sua íntegra.

O Rogério descreveu a experiência das duas aulas como inovadora, ainda que um pouco confusa. Destacou que “Conseguimos ver o que estamos a aprender”. Este aluno colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu, um 3 em como achou interessante. Concordou totalmente que ambas as aulas foram motivantes e afirmou ter-se empenhado nas mesmas.

O Ronaldo descreveu a experiência das duas aulas como interessante e apelativa, ainda que ligeiramente confusa, dando lugar a algumas distrações. Destacou como aspetos positivos a interação com as tecnologias e voltou a sublinhar o ser interessante. Este aluno colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), 4 em aprendeu, divertiu-se e achou interessante. Também concordou totalmente que ambas as aulas foram motivantes e afirmou ter-se empenhado nas mesmas.

3.3. Grupo d

Este grupo era constituído pelas alunas Cassandra e Carla. Em termos de atitude em sala de aula, as alunas eram um pouco diferentes. Apesar de se tentarem envolver nas aulas de matemática, a Cassandra era extremamente calma em sala de aula, sendo muito silenciosa. Infelizmente, também era um pouco silenciosa no que toca a tirar dúvidas. A Carla por vezes falava um pouco em sala de aula de assuntos externos à disciplina e revelava algumas dificuldades, ainda assim esforçava-se sempre que a professora titular de turma propunha tarefas. Durante o decorrer normal das aulas de Matemática, a Cassandra era uma aluna extrinsecamente motivada porque se envolvia sempre na resolução das tarefas, mas, até pela demora em iniciá-las, não demonstrava interesse. A Carla era extrinsecamente motivada, pois, como se observou durante as aulas de Matemática normais, o seu objetivo era terminar as tarefas e não tanto compreender os seus conteúdos.

3.3.1. Composição de funções

Na figura seguinte, apresentam-se as classificações gerais obtidas do guião da primeira aula, separado em suporte digital e em suporte papel, do trabalho de casa, da ficha da segunda aula e do teste.

<table>
<tr><th rowspan="3">nome</th><th rowspan="3">grupo</th><th colspan="4">Primeira aula</th><th rowspan="3">Trabalho de casa</th><th>Segunda aula</th><th rowspan="3">Teste</th></tr>
<tr><th colspan="2">Tarefa 1</th><th colspan="2">Tarefa 2</th><th rowspan="2">Ficha de tarefas</th></tr>
<tr><th>produção digital (GeoGebra)</th><th>produção escrita</th><th>produção digital (GeoGebra)</th><th>produção escrita</th></tr>
<tr><td>Cassandra</td><td rowspan="2">d</td><td rowspan="2">100%</td><td>76%</td><td rowspan="2">70%</td><td>5%</td><td>85%</td><td>55%</td><td>85%</td></tr>
<tr><td>Carla</td><td>70%</td><td>5%</td><td>85%</td><td>50%</td><td>70%</td></tr>
</table>

Tabela 6 - Classificações gerais - grupo d

Agora, analise-se a resolução das tarefas da primeira aula no GeoGebra por parte do grupo d.

3. Análise de resultados

Quanto à primeira tarefa, tal como a maioria dos restantes grupos, as alunas fizeram todas as construções corretamente. O seletor foi construído com o mínimo e máximo (-10 e 10 respetivamente) pretendidos, e foi apropriadamente denominado de a. As funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$, assim como os pontos $A = \big(a, f(a)\big)$ e $B = \big(a, g(a)\big)$, pontos estes cuja abcissa corresponde à variável do seletor, foram corretamente construídos. Quanto aos pontos de cada uma das funções compostas fog e gof, cuja abcissa corresponde também à variável do seletor construído – pontos $T = \Big(a, f\big(g(a)\big)\Big)$ e $R = \Big(a, g\big(f(a)\big)\Big)$, as ordenadas, correspondentes às funções compostas, também foram determinadas corretamente, sendo que este grupo denominou por h a função composta $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x})$ e por p a função $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$. Pode-se observar uma ilustração do documento produzido por este grupo na figura seguinte. Note-se que as alunas despenderam algum tempo para personalizar o aspeto das construções.

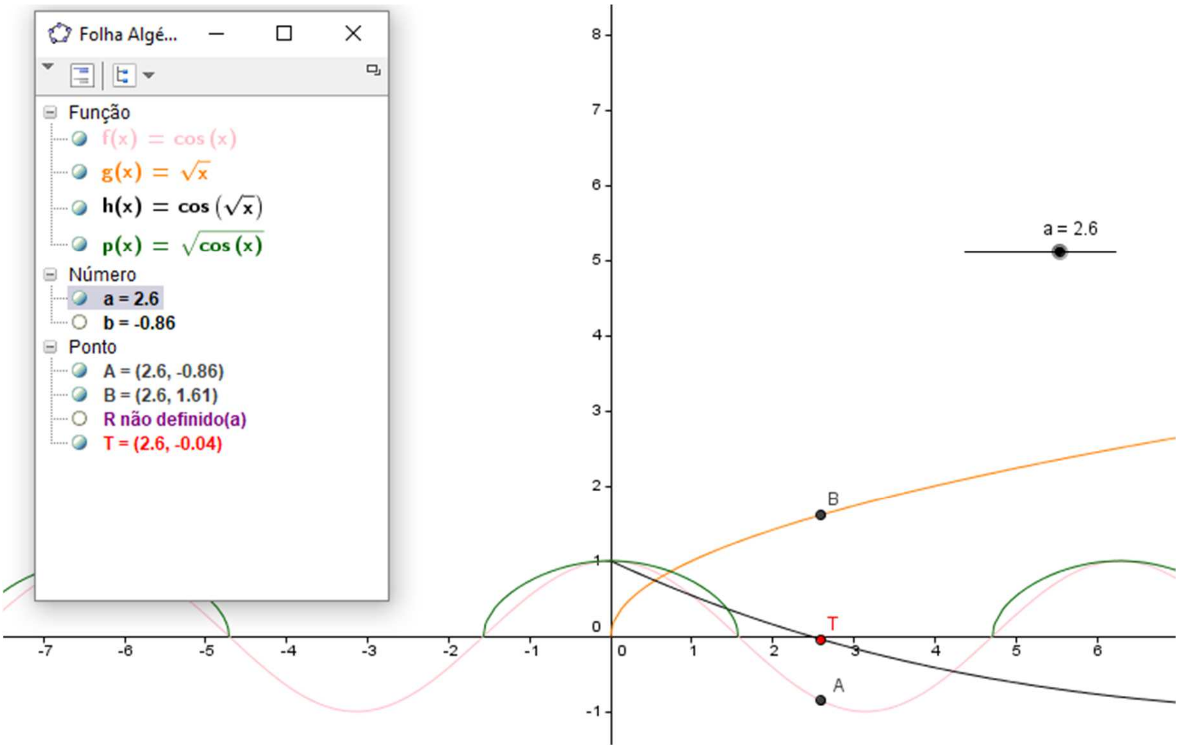


Figura 16 - Resolução no GeoGebra da primeira tarefa - grupo d

Na segunda tarefa, devido à falta de tempo, a Cassandra e a Carla não resolveram por completo o proposto. Ainda assim, construíram corretamente o seletor a, incluindo os valores mínimos e máximos (de modo semelhante à tarefa anterior), as funções $h(x) = x^3$

e $l(x) = \frac{1}{x}$, e os pontos cuja abcissa corresponde à variável do seletor - $A = (a, l(a))$ e $B = (a, h(a))$. Apenas construíram um dos pontos pertencentes às compostas - $T = (a, h(l(a)))$, mas construíram-no corretamente. Pode-se verificar, na figura seguinte, o documento em GeoGebra que as alunas submeteram como resolução da segunda tarefa.

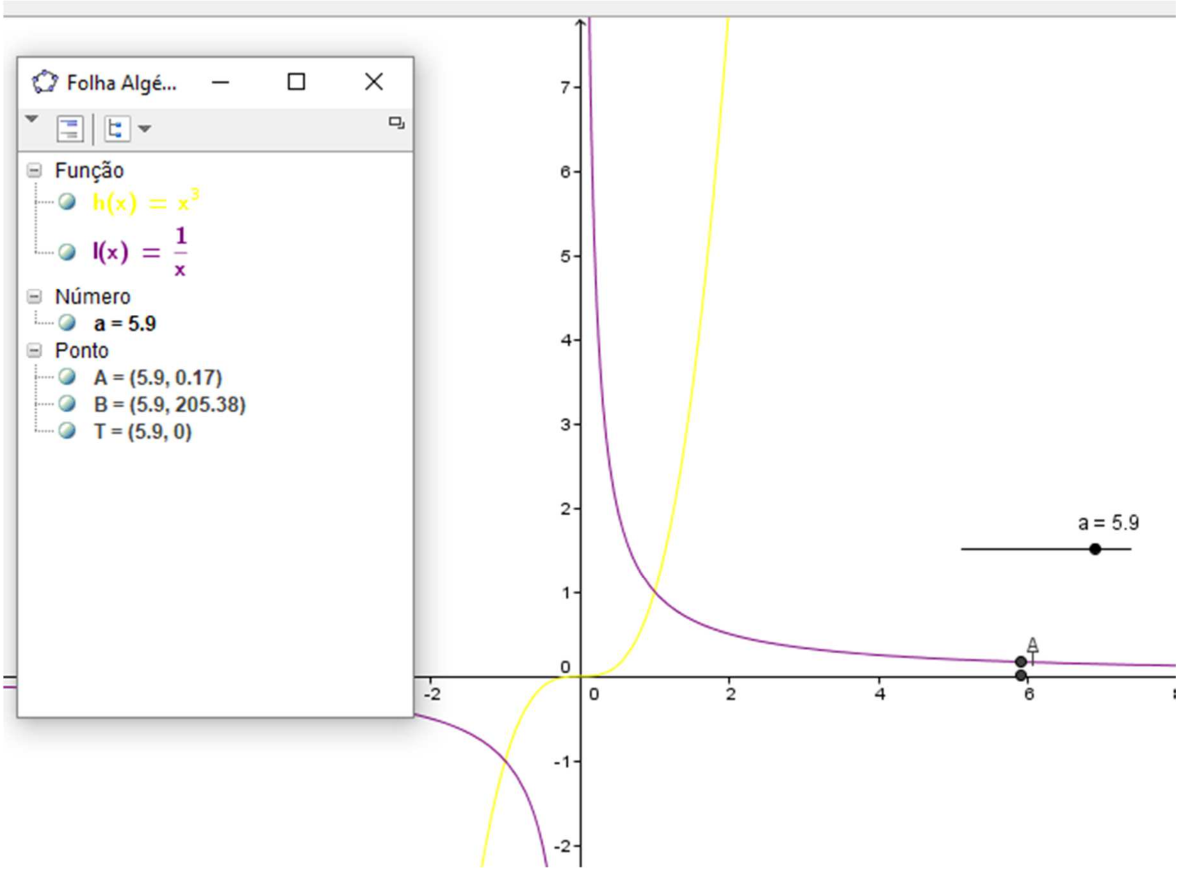


Figura 17 - Resolução no GeoGebra da segunda tarefa - grupo d

Em relação ao suporte papel, na primeira tarefa, na questão 1.1, que trata a função composta $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x})$, as alunas observaram que o ponto T= $(x, \cos(\sqrt{x}))$ só está definido quando “g aparece”, como coloca a Cassandra na figura seguinte. Isto é, as alunas observaram que T só está definido no domínio da função g. Também afirmaram indiretamente que o domínio da função $g(x) = \sqrt{x}$ é $\mathbb{R}_0^+$: “quando a é igual ou superior a zero”. No entanto, tal como o grupo b, este grupo afirmou incorretamente que, quando a abcissa de T aumenta, a sua ordenada respetiva diminui. Como colocou a Carla “Quando aumentamos a, o ponto T diminui a imagem”. Tal poderá dever-se ao facto de as alunas não terem deslocado a janela do GeoGebra e, assim, o zoom standard que o GeoGebra apresentou por defeito a todos os alunos pôde dar a entender que T assim se comportava.

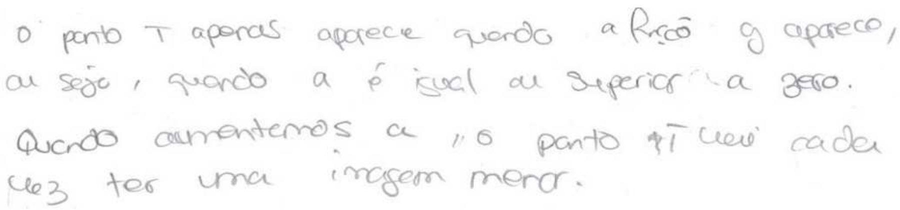

O ponto T apenas aparece quando a função g aparece, ou seja, quando a é igual ou superior a zero. Quando aumentamos a, o ponto T vai cada vez ter uma imagem menor.

Figura 18 - Resolução de parte da alínea a) de 1.1 (guião de tarefas) – Cassandra - grupo d

As alunas representaram corretamente, na forma de tabela, as funções f, g e fog. Também determinaram corretamente a expressão algébrica de fog. Como se pode ver na figura seguinte, as alunas justificaram os passos com o cabeçalho da tabela (a Cassandra justificou de um modo similar no seu guião). Na tabela mencionada anteriormente, tabela esta que os alunos preencheram na alínea b), no cabeçalho de uma das colunas encontrava-se "$w = g(a)$" e na última coluna "Ordenada de $T - f(w)$". Deste modo, as alunas revelaram compreender a forma como a composição de funções se procede. Esta resposta ilustra como as alunas mobilizaram os seus conhecimentos prévios com o recurso ao GeoGebra e resolveram uma tarefa que envolvia conhecimentos formalmente ainda não aprendidos.

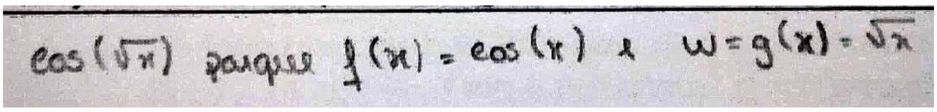
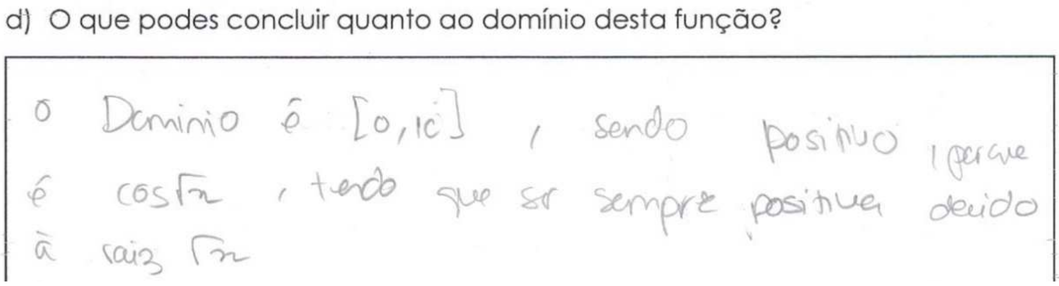

$\cos(\sqrt{x})$ porque $f(x) = \cos(x)$ e $w = g(x) = \sqrt{x}$

Figura 19 - Resolução da alínea c) de 1.1 (guião de tarefas) – Carla - grupo d

Ainda em relação a 1.1, na alínea d), as alunas concluiram que o domínio da função composta fog é [0,10], como se pode averiguar na figura seguinte. Mais uma vez, os membros do grupo guiaram-se pela janela que o GeoGebra lhes apresentou por defeito e pelo domínio do seletor. Porém, é importante ressaltar que este grupo observou corretamente que o domínio tem de ser sempre não negativo devido à raiz quadrada (apesar do grupo usar a palavra 'positiva', também contemplam o zero no intervalo, portanto este grupo queria afirmar 'não negativa').

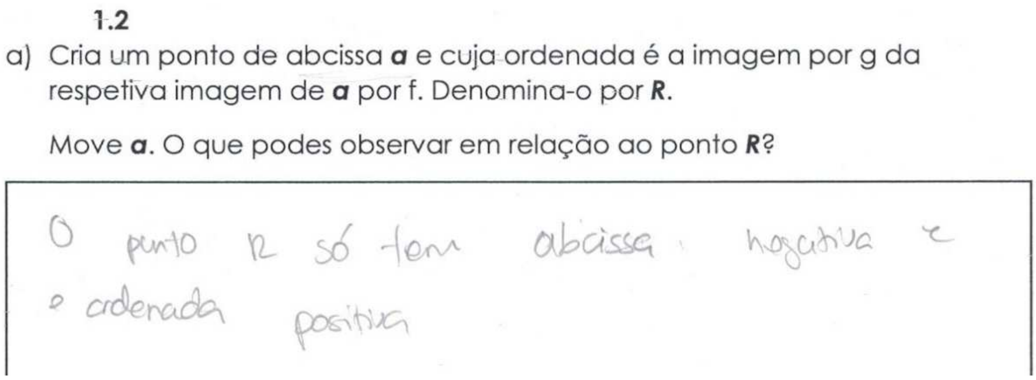
3. Análise de resultados


d) O que podes concluir quanto ao domínio desta função?

o Dominio é $[0,\pi]$, sendo positivo porque é $\cos\sqrt{x}$, tendo que ser sempre positiva devido à raiz $\sqrt{x}$

Figura 20 - Resolução da alínea d) de 1.1 (guião de tarefas) – Cassandra - grupo d

Relativamente à alínea a) de 1.2, a alunas inferiram incorretamente que $R = \left(a, \sqrt{\cos(a)}\right)$ só estava definido para abcissas negativas, contudo constataram corretamente que R apenas assume ordenadas positivas (ver figura seguinte). O que é contraditório com a resposta à alínea seguinte, pois constataram que R não está definido para o intervalo $[2,4]$, logo as alunas observaram que R está ainda definido para pelo menos o intervalo $[0,1]$.


1.2

a) Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a imagem por g da respetiva imagem de ***a*** por f. Denomina-o por ***R***.

Move ***a***. O que podes observar em relação ao ponto ***R***?

O ponto R só tem abcissa negativa e o ordenada positiva

Figura 21 - Resolução da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) – Cassandra - grupo d

Relativamente à função gof, ambas as alunas cometeram um erro. Como se pode verificar na figura seguinte (sendo que se verifica de igual modo na resolução da Cassandra), as alunas, para o caso geral de abcissa igual a x, determinaram $\sqrt{x}\cos(x)$, no lugar de $\sqrt{\cos(x)}$.

3. Análise de resultados

a	w=f(a)	g(a)	Ordenada de R g(w)
⋮	⋮	⋮	⋮
8	-0,15	2,83	não definido
x	cos x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$ x cos x

Figura 22 - Resolução da alínea b) de 1.2 (guião de tarefas) – Carla - grupo d

Na alínea seguinte (c) da questão 1.2, onde era necessário determinar a expressão algébrica da função composta gof, as alunas igualaram $\sqrt{x}\cos(x)$ a $\sqrt{\cos(x)}$, tal como se pode ver na figura seguinte, o que revela falta de bases e talvez alguma dificuldade na apropriação dos conhecimentos subjacentes aos tópicos que estão aqui a ser explorados.

$$\sqrt{x} \times \cos x = \sqrt{\cos x}$$

Figura 23 - Resolução da alínea c) de 1.2 (guião de tarefas) – Carla - grupo d

Relativamente à alínea d), as alunas expressaram-se de um modo algo interessante pois, indiretamente, ligam a construção do ponto R com a função composta gof, como se pode observar na figura seguinte, o que revela que as alunas começaram a apropriar-se dos conceitos exploradas (dada a forma como o ponto R é construído).

Quando a função f(x) é negativo, o ponto R não se encon-
tra definido, o que leva a ter vários intervalos de domínio.

Figura 24- Resolução da alínea d) de 1.2 (guião de tarefas) – Carla - grupo d

Na questão 1.3, as alunas constataram que ambas as funções compostas fog e gof são diferentes, salientando que o domínio de gof não é contínuo e é positivo, enquanto que fog é uma função contínua em todo o seu domínio e assume tanto valores negativos como positivos no seu contradomínio (ver na figura seguinte). Ainda na figura anterior, as alunas referem que quando a função f é negativa o ponto R não está definido “o que leva a ter vários intervalos de domínio”, logo as alunas conseguiram associar a construção do ponto R e, portanto, da função gof à função f. O que evidencia que as alunas começaram a apropriar-se do conceito de domínio de uma função composta.

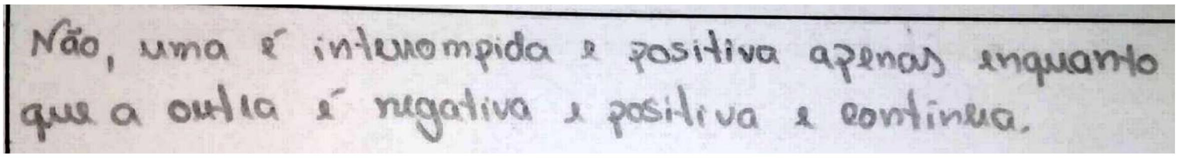


Figura 25 - Resolução da questão 1.3 (guião de tarefas) – Carla - grupo d

Este grupo iniciou a resolução da tarefa 2 do guião (ao contrário da maioria dos restantes grupos) mas, pela falta de tempo, não terminou, preenchendo apenas a primeira alínea e parte da segunda de 2.1.

Na questão 2.1, na alínea a) ambas as alunas apenas observaram que $T = \left(a, h\left(l(a)\right)\right) = \left(a, \frac{1}{x^3}\right)$ não está definido para a abcissa nula.

Analise-se, agora, o trabalho de casa que ambas as alunas entregaram.

As duas resolveram corretamente a tarefa cometendo apenas um erro em não justificar que d é uma distância e, por isso, é sempre não negativo, logo $d^2 = h^2 + 150^2$ e $d = \sqrt{22500 + h^2}$ são equivalentes. Sem justificar, as alunas não poderiam afirmar equivalência apenas uma relação de implicação num sentido. Podemos verificar toda a resolução da tarefa 7 da Carla na figura seguinte, a resolução da Cassandra também é similar.

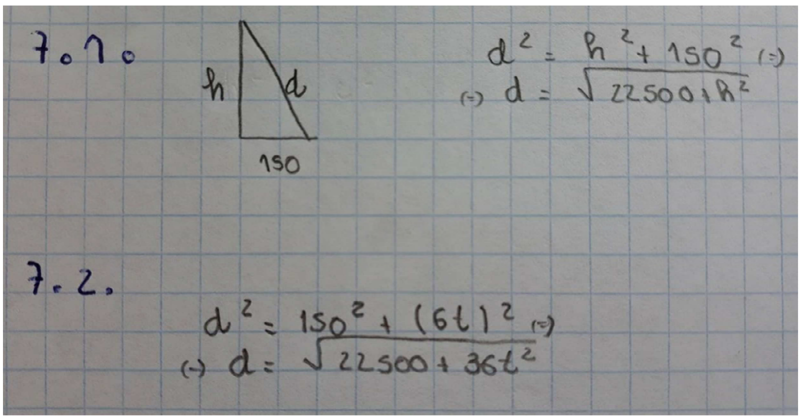


Figura 26 - Resolução da tarefa 7 (trabalho de casa) -Carla - grupo d

3. Análise de resultados

Ambas as resoluções evidenciam que as alunas compreenderam como se determina a expressão algébrica de uma composição de funções em contexto real, ainda que a um nível de dificuldade reduzido. Recorde-se que a tarefa foi escolhida para consolidar os conhecimentos da primeira aula do estudo sem se ter formalizado ainda a composição de funções (a formalização deu-se no início da segunda aula).

Analise-se, desta vez, a ficha de tarefas recolhida na segunda aula deste estudo.

A tarefa 1 foi resolvida acertadamente, de forma idêntica ao grupo b, o que evidencia que as alunas assimilaram como determinar a expressão algébrica de uma função composta, sendo que aqui a aplicaram num contexto real (figura seguinte).

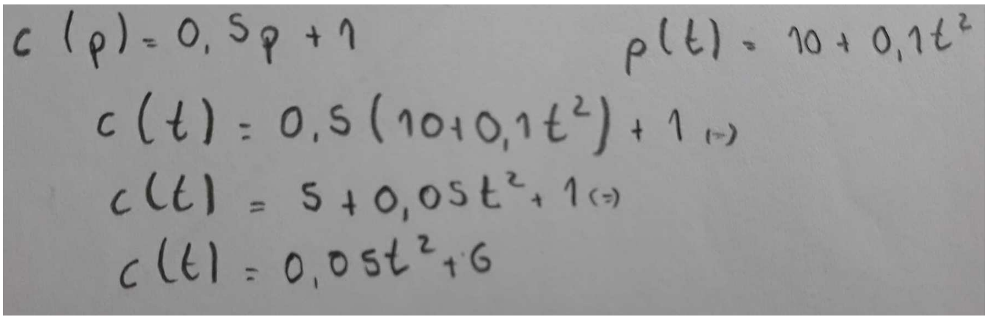
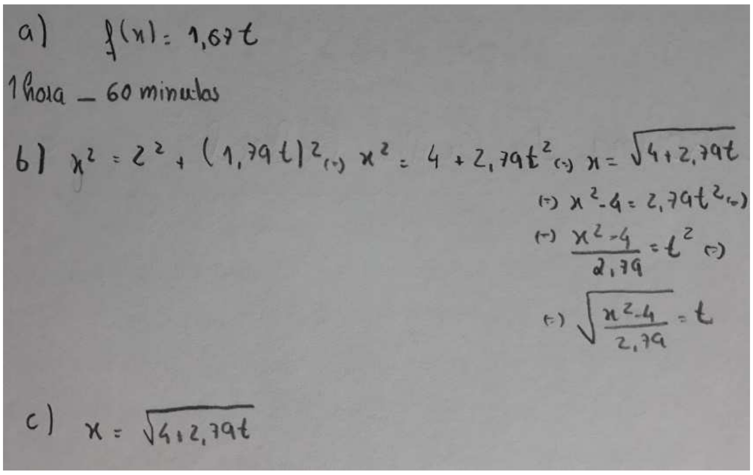


Figura 27 - Resolução da tarefa 1 (ficha de tarefas) – Carla - grupo d

Na alínea a) e na alínea b) da segunda tarefa, como se pode ver na figura seguinte, o grupo d conseguiu determinar a função pretendida. Foi um dos poucos grupos que conseguiu resolver a alínea b) corretamente em relação a todo a turma. Quanto à alínea c), os alunos determinaram $x = \overline{CP}$ em função do tempo, quando a função pretendida era a função que, dada a distância $\overline{CP}$, retorna $\overline{AC}$. Deste modo, as alunas revelaram dificuldade na interpretação da última alínea. A resolução da alínea b), evidencia também que as alunas assimilaram como determinar a expressão algébrica de uma função composta.

3. Análise de resultados



a) $f(x) = 1,67t$

1hora _ 60 minutos

b) $x^2 = 2^2 + (1,79t)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 2,79t^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{4+2,79t}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 2,79t^2 \Leftrightarrow$

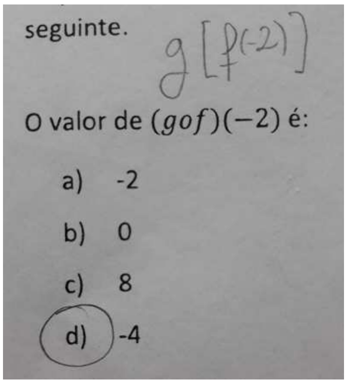
$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2,79} = t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-4}{2,79}} = t$

c) $x = \sqrt{4+2,79t}$

Figura 28 - Resolução da tarefa 2 (ficha de tarefas) – Carla - grupo d

Quanto à tarefa 3, este grupo resolveu corretamente, conseguindo aplicar a definição de função composta para um dado ponto. A Cassandra demonstrou, inclusivamente, a lápis o seu raciocínio - $g(f(-2))$ (ver figura seguinte).



seguinte. $g[f(-2)]$

O valor de $(gof)(-2)$ é:

a) -2

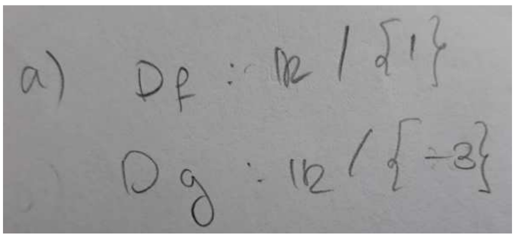
b) 0

c) 8

d) -4

Figura 29 - Resolução da tarefa 3 (ficha de tarefas) – Cassandra - grupo d

Quanto às tarefas 4, as alunas apresentaram disparidade de resolução, uma vez que a Cassandra resolveu a primeira alínea, enquanto que a Carla não resolveu de todo a tarefa. A resolução da Cassandra desta alínea coincidia apenas com os domínios das funções dadas (ver figura seguinte).



a) $D_f : \mathbb{R} / \{1\}$

$D_g : \mathbb{R} / \{-3\}$

Figura 30 - Resolução da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Cassandra - grupo d

3. Análise de resultados

Como aconteceu com a maioria dos alunos turma, a tarefa 5 não foi resolvida por falta de tempo devido a demorarem muito na resolução da tarefa 2.

Analise-se, agora, a resolução da tarefa dos testes recolhida.

Em ambas as resoluções do teste pelos elementos do grupo d, pode observar-se uma aprendizagem dos conceitos associados à composição de funções. As duas estudantes revelaram saber determinar a expressão algébrica da função composta. No que se refere à determinação do domínio da função composta, ainda que a execução revele falhas, as alunas entenderam, de um modo geral, como este se determina.

A Cassandra, ao determinar o domínio de uma das funções dadas, não considerou o intervalo fechado em -1 e, de seguida, cometeu um erro na inequação $\frac{x}{x-2} > -1$ equivalendo-a erroneamente à expressão $\frac{x}{x-2} - 1 > 0$ (na realidade, esta aluna usou $\frac{x+x-2}{x-2} > 0$, porque desenvolveu diretamente e talvez tenha sido esta pressa que tenha facilitado este erro), mas, como foi mencionado e se vê na figura abaixo, a Cassandra aparenta ter-se apropriado do conceito de domínio da função composta.

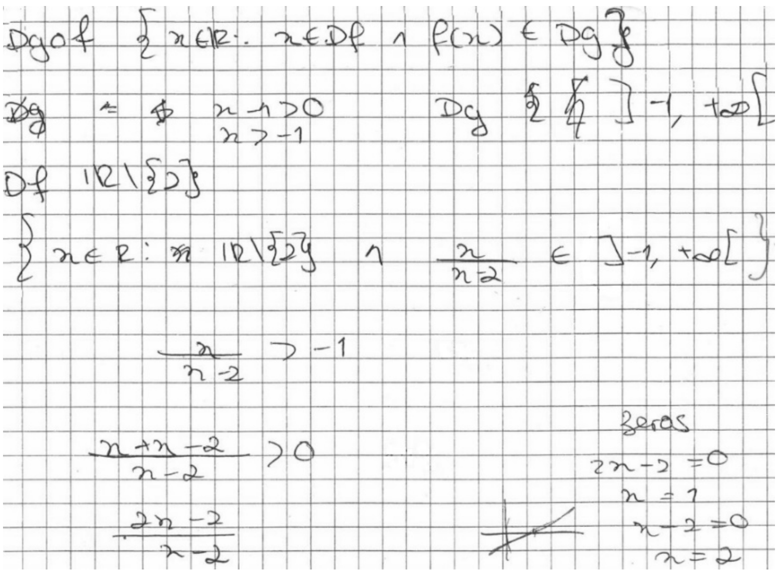


Figura 31 - Resolução da Cassandra - grupo d – à questão do teste

Como se pode verificar na figura seguinte, a Cassandra não apresenta dificuldades na determinação da expressão algébrica da função composta.

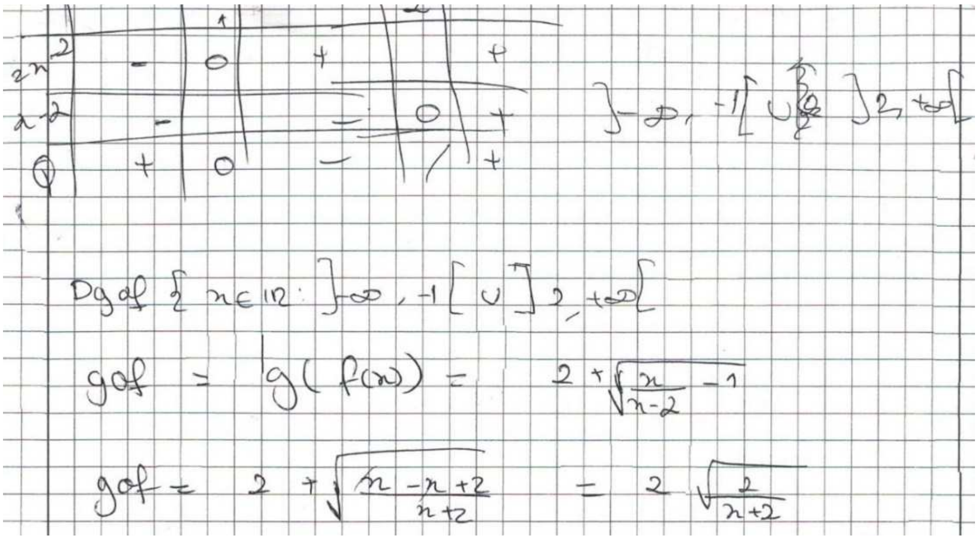


Figura 32 - Resolução da Cassandra - grupo d – à questão do teste (continuação)

A Carla revelou uma maior falta de bases ao não desenvolver a condição $\frac{x}{x-2} \in [1, +\infty[$ e, consequentemente, resolveu como se, em lugar desta condição, estivesse a condição $x \in [1, +\infty[$, como se pode verificar na figura seguinte.

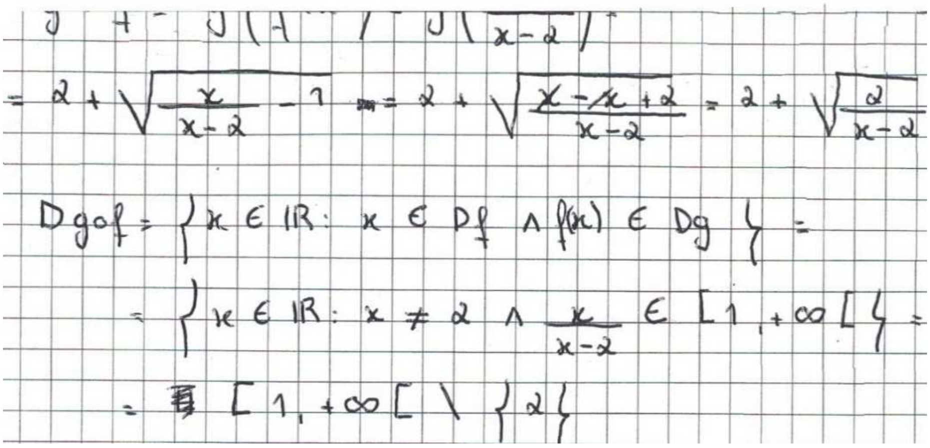


Figura 33 - Resolução da Carla - grupo d – à questão do teste

Como já foi mencionado, a Carla determinou corretamente a expressão algébrica da função composta, não apresentando dificuldades a qualquer nível.

3.3.2. Motivação

Neste espaço, analisa-se a motivação dos alunos ao longo das aulas pelos diários de bordo e os questionários.

Ao longo de ambas as aulas deste estudo, tanto a Cassandra como a Carla se envolveram na resolução das tarefas propostas, interessando-se mais na primeira aula (aula que envolveu o uso do GeoGebra). A Carla destacou-se um pouco mais pois foi interventiva para esclarecer dúvidas. Ao princípio a Cassandra, não tirou muitas dúvidas, mas como a professora investigadora por vezes incentivava a que tirassem dúvidas, a aluna depois começou também a intervir. Estas alunas, como já foi mencionado, eram tipicamente extrinsicamente motivadas, mas na aula do GeoGebra demonstraram um interesse maior que o habitual às normais aulas de Matemática.

Agora, apresenta-se a análise dos questionários preenchidos por ambos os membros do grupo d.

A Cassandra descreveu a experiência das duas aulas como inovadora e criativa, sendo que afirmou "Devia ter uma informação prévia da matéria que estava a dar". Destacou que "É mais fácil de obter conhecimento a partir da experiência". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 4 em como aprendeu. Concordou totalmente que ambas as aulas foram motivantes, divertidas e interessantes e afirmou ter-se empenhado arduamente nas mesmas.

A Carla descreveu a experiência das duas aulas como inovadora, ainda que um pouco confusa. Destacou como aspetos positivos que foi uma "Forma diferente de aprender" e que "Observamos representações interativas". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu e um 4 em como achou interessante. Concordou totalmente que ambas as aulas foram motivantes e afirmou ter-se empenhado realmente nas mesmas.

3.4. Grupo g

Este grupo era constituído pelas alunas Beatriz e Bianca. A Beatriz era uma aluna que se destacava nas aulas de Matemática pela positiva. Apesar de não intervir muito, envolvia-se na resolução das tarefas propostas e frequentemente chamava a professora titular de turma para esclarecer as suas dúvidas. A Bianca não era uma aluna que se destacasse por comportamentos positivos ou negativos em sala de aula. Apresentava uma atitude algo "tépida" nos momentos de aula destinados à resolução de tarefas, mas mantinha sempre um ritmo mínimo de acompanhamento de aula. A Beatriz é exemplo de uma aluna intrinsecamente motivada, dado que nas aulas de Matemática normais demonstrava genuíno interesse em todos os tópicos abordados e tentava sempre aprender mais. A Bianca era uma aluna extrinsecamente motivada, uma vez que, apesar de participar nas aulas de Matemática quando exigido, revelava-se algo aborrecida.

3.4.1. Composição de funções

Na figura seguinte, apresentam-se as classificações gerais do grupo g obtidas do guião da primeira aula, separado em suporte digital e em suporte papel, do trabalho de casa, da ficha da segunda aula e do teste.

nome	grupo	Primeira aula				Trabalho de casa	Segunda aula	Teste
		Tarefa 1		Tarefa 2			Ficha de tarefas	
		produção digital (GeoGebra)	produção escrita	produção digital (GeoGebra)	produção escrita			
Beatriz	g	100%	92%	70%	21%	85%	43%	68%
Bianca			92%		21%	85%	43%	93%

Tabela 7 - Classificações gerais - grupo g

Analise-se os dois documentos em GeoGebra produzidos pelas alunas deste grupo.

No que se refere à primeira tarefa, as alunas, tal como o grupo anteriormente analisado e os restantes grupos da turma, fizeram todas as construções corretamente. Tanto o seletor (com o mínimo e máximo pretendidos), como as funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$ e os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (a, g(a))$ foram construídos como pretendido. Os pontos pertencentes a ambas as funções compostas fog e gof cuja abcissa corresponde à variável do seletor - $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ e $R = \left(a, g\left(f(a)\right)\right)$ – foram bem construídos. Pode-se verificar abaixo uma ilustração do documento entregue pelas duas alunas.

Quanto à representação das funções compostas, as alunas denominaram h a função fog e denominaram por e a função composta gof, ambas, como se pode ver na figura seguinte na folha algébrica do GeoGebra, foram corretamente representadas.

3. Análise de resultados

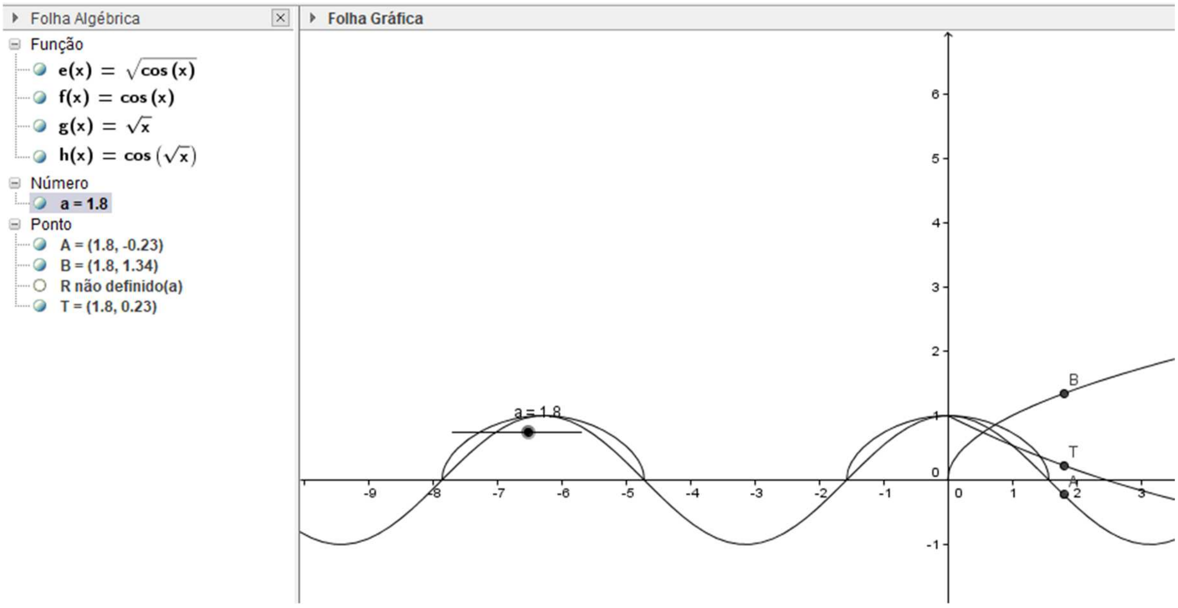


Figura 34 - Resolução no GeoGebra da primeira tarefa - grupo g

Na figura seguinte encontra-se um *printscreen* do documento em GeoGebra entregue pelo grupo g correspondente à sua resolução da segunda tarefa, sendo que foi um dos poucos grupos da turma que o entregou. As alunas não chegaram a terminar a resolução derivado à falta de tempo, porém todas as construções realizadas encontram-se corretas.

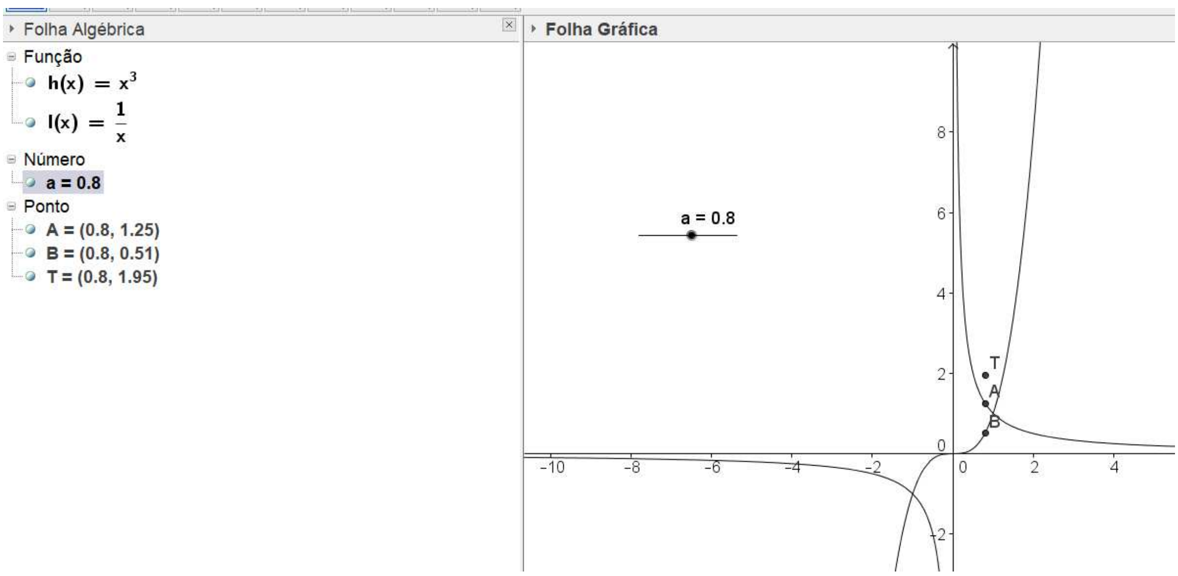
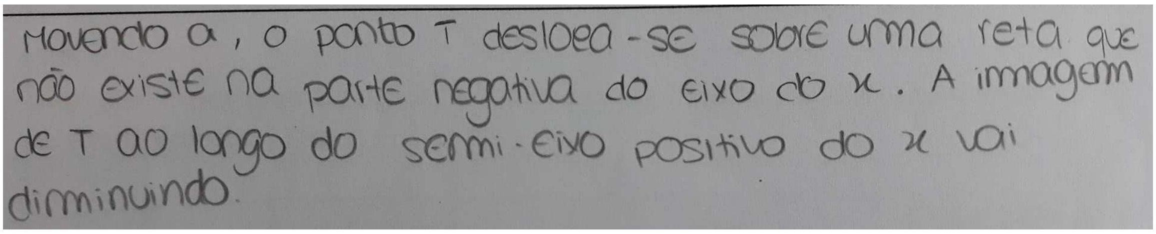


Figura 35 - Resolução no GeoGebra da segunda tarefa - grupo g

O seletor está corretamente denominado de a, como o guião indica, encontrando-se o mínimo de -10 e o máximo de 10 bem estabelecidos. As funções $h(x) = x^3$ e $l(x) = \frac{1}{x}$, assim como os pontos $A = \big(a, l(a)\big)$ e $B = \big(a, h(a)\big)$ encontram-se representados corretamente. A última determinação que as alunas realizaram foi o ponto pertencente à função composta hol cuja abcissa correspondia à variável a do seletor - $T = \Big(a, h\big(l(a)\big)\Big)$ – e, também este se encontra bem construído.

Analise-se, agora, a primeira tarefa do guião em suporte papel.

Na questão 1.1, questão esta que explora a função composta fog, o grupo g observou corretamente que $T = (a, f(g(a)))$ só está definido para abcissas não negativas, ainda que tenham afirmado erradamente que este se desloca sobre uma reta como se pode verificar na figura seguinte (a figura seguinte corresponde à resolução da Beatriz, no entanto ambas as resoluções deste grupo são semelhantes para todo o guião e ficha de tarefas). Porém, nas alíneas posteriores, as alunas parecem empregar a palavra reta por defeito, quando posteriormente constatam, corretamente, que o ponto T pertence à função $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x})$ e esta não é uma reta.



Movendo a, o ponto T desloca-se sobre uma reta que não existe na parte negativa do eixo do x. A imagem de T ao longo do semi-eixo positivo do x vai diminuindo.

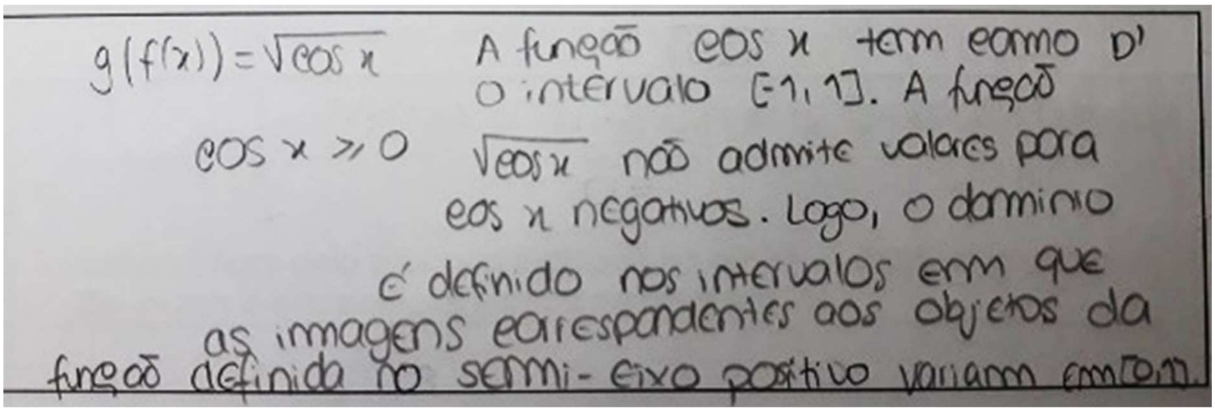
Figura 36 - Resolução de parte da alínea a) de 1.1 (guião de tarefas) – Beatriz - grupo g

As alunas preencheram corretamente a tabela referente à função fog e determinaram também a sua expressão algébrica. Deste modo, as alunas mobilizaram os seus conhecimentos prévios e com recurso ao GeoGebra resolveram uma tarefa que envolvia a determinação da expressão algébrica de uma função composta, conceito este ainda não formalizado em sala de aula.

Quanto ao domínio da função composta em questão, as alunas determinaram corretamente que $D = [0, +\infty[$, usando também os conhecimentos prévios e recorrendo ao GeoGebra.

Na questão 1.2, que trata a função composta $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$, as alunas observaram que o ponto R se deslocava sobre a função $f(x) = \cos(x)$, sendo que a única diferença seria que o domínio não era contínuo estando gof apenas definido para os objetos cuja imagem por f é não negativa. Esta afirmação não está completamente correta (a função $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$ tem uma representação gráfica muito semelhante à função $f(x) = \cos(x)$, mas são diferentes não só no domínio). É curioso que as alunas tenham feito estas observações, uma vez que gof tem naturalmente algumas semelhanças com f. Porém, esta observação não veio a ser um impedimento à posterior resolução do guião, uma vez que as alunas preencheram corretamente os valores da função composta gof na tabela e, ainda, determinaram a sua expressão algébrica.

Este grupo destacou-se, ainda, pela positiva, da maioria dos colegas de turma, pois explicou, em formato texto, porque razão o domínio não era contínuo, como se pode ver na figura seguinte. Assim sendo, as alunas compreenderam de que modo a função composta foi formada e de que forma o seu domínio é composto, mobilizando mais uma vez os conhecimentos prévios com recurso ao GeoGebra para resolver uma tarefa que envolve conhecimentos ainda não formalizados em sala de aula.


$g(f(x)) = \sqrt{\cos x}$

$\cos x \geq 0$

A função $\cos x$ tem como D' o intervalo $[-1, 1]$. A função $\sqrt{\cos x}$ não admite valores para $\cos x$ negativos. Logo, o domínio é definido nos intervalos em que as imagens correspondentes aos objetos da função definida no semi-eixo positivo variam em $[0,1]$

Figura 37 - Resolução da alínea c) de 1.2 (guião de tarefas) – Beatriz - grupo g

Na tarefa 2, o grupo g resolveu ainda as alíneas a) e b) porém, por falta de tempo, não terminou. Observaram que o ponto $T = \left(a, h\left(l(a)\right)\right)$ estava definido em todo o $\mathbb{R}$ exceto na abcissa zero (ver figura seguinte) e iniciaram a representação de hol em tabela.

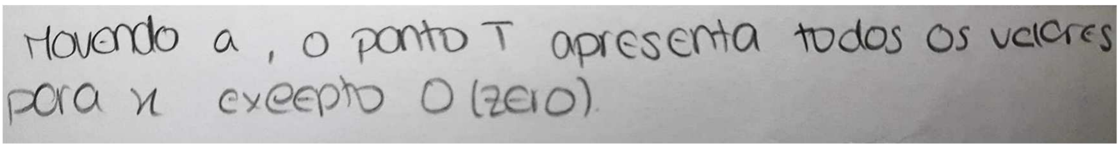

Movendo a, o ponto T apresenta todos os valores para x exceto 0 (zero).

Figura 38 - Resolução da alínea a) de 2.1 (guião de tarefas) – Beatriz - grupo g

3. Análise de resultados

Analise-se, agora, o trabalho de casa de ambas as alunas do grupo g.

Tanto a Beatriz como a Bianca resolveram corretamente a tarefa do trabalho de casa, falhando apenas ao não explicitarem porque razão a relação de equivalência não contempla a resposta com o sinal negativo antes da raíz quadrada (na figura seguinte encontra-se a reolução da alínea 7.1 da Beatriz). Isto é, as alunas teriam de colocar $d^2 = h^2 + 150^2 \Leftrightarrow d^2 = \pm\sqrt{h^2 + 150^2}$ e justificar posteriormente que apenas poderia ser $d^2 = \sqrt{h^2 + 150^2}$, pois d é uma distância logo é sempre positiva. Ou, então, teriam de assinalar abaixo do equivalente isso mesmo.

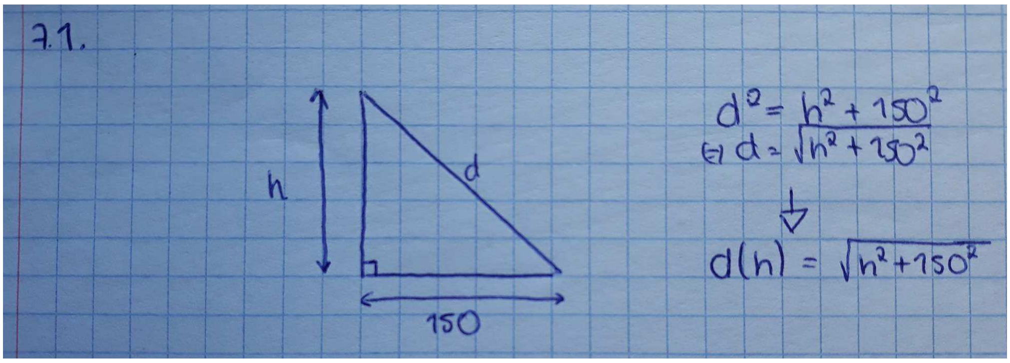


Figura 39 - Resolução da alínea 7.1 (trabalho de casa) -Beatriz - grupo g

Similarmente, como foi dito, a Bianca não justificou apropriadamente a equivalência da alínea 7.1 (ver figura seguinte).

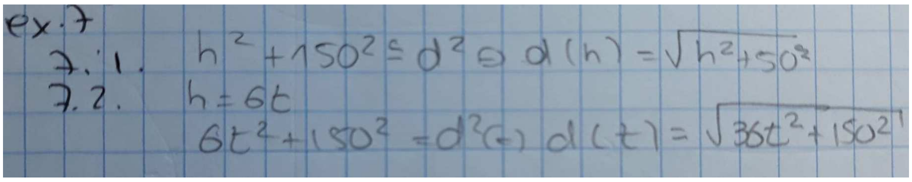


Figura 40 - Resolução da tarefa 7 (trabalho de casa) -Bianca - grupo g

Ambas as resoluções do trabalho de casa evidenciam que tanto a Beatriz como a Bianca souberam determinar a expressão algébrica de uma função composta num contexto real, mesmo sem existir ainda a formalização dos conteúdos relacionados com a composição de funções, ainda que a um nível de dificuldade reduzido.

Analise-se, agora, a ficha de tarefas realizadas por cada um dos elementos do grupo g na segunda aula.

3. Análise de resultados

Na tarefa 1, tal como os restantes grupos, podemos encontrar indícios de que as alunas assimilaram como determinar a expressão algébrica de uma função composta, uma vez que resolveram a tarefa corretamente na sua íntegra (figura seguinte).

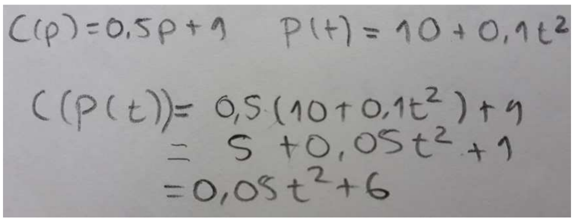


Figura 41 - Resolução da tarefa 1 (ficha de tarefas) – Bianca - grupo g

Este grupo optou, ao contrário da maioria dos restantes membros da turma, por não realizar a tarefa 2, tentando resolver as tarefas 3, 4 e 5, se bem que ainda despenderam de algum tempo de aula para tentar compreender o enunciado da tarefa 2.

Na tarefa 3, tarefa esta de escolha múltipla, o grupo selecionou a opção correta relativamente à definição de função composta para um dado ponto, tal como a maioria dos restantes grupos. Curiosamente, a Beatriz anotou a lápis a expressão geral do domínio de uma função composta nesta tarefa, evidenciando que antes de dar a sua resposta ainda ponderou como se determina $(gof)(-2)$ e não pensou diretamente na forma como se determina a expressão algébrica da função composta $(gof)(-2) = g\big(f(-2)\big)$, (figura seguinte).

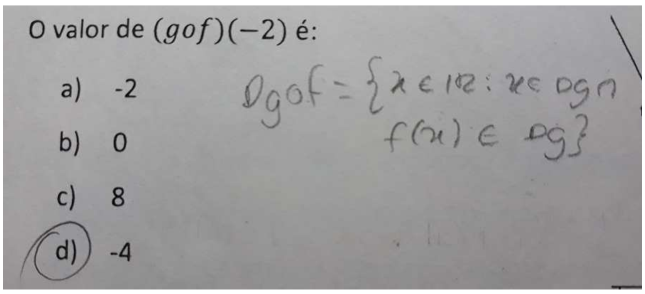


Figura 42 - Resolução da tarefa 3 (ficha de tarefas) – Beatriz - grupo g

Na tarefa 4, os elementos do grupo resolveram corretamente a alínea a) que envolvia a determinação do domínio de duas funções reais de variável real - $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ e $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ - logo não envolviam a composição de funções ainda (figura seguinte).

3. Análise de resultados

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad g(x) = \frac{1}{x+3} \quad \mathbb{R}\backslash\{-3\}$$

Figura 43 - Resolução da alínea a) tarefa 4 (ficha de tarefas) – Beatriz - grupo g

Na alínea b), as alunas tentaram apenas determinar os domínios das funções compostas, não determinando as expressões algébricas. Dada a resolução da primeira tarefa da ficha ter revelado que este grupo soube determinar a expressão algébrica da função composta, uma das razões pela qual somente terem determinado os domínios poderá ter dever-se ao facto de pensarem que era apenas necessário resolver a parte mais complexa. A outra razão para tal poderá ter sido esquecimento.

Ainda na alínea b) da tarefa 4, o grupo g, ao determinar o domínio de fog, não desenvolveu a condição $g(x) \in D_f$, que substituindo é $\frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Ou seja, as alunas aplicaram corretamente a expressão $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ chegando ao conjunto $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\} \wedge \frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\}$, contudo não desenvolveram corretamente a condição $\frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ igualando-a a $x \neq -3$ (figura seguinte). Assim sendo, as alunas apenas revelaram dificuldades no desenvolvimento de expressões e não na determinação do domínio da função composta.

$$f \circ g = f(x) \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$
$$\{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\} \wedge \frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$\{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}\}$$

Figura 44 - Resolução de parte (domínio de fog) da alínea b) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Beatriz - grupo g

Ao determinar o domínio de gof, o grupo repetiu o erro, não desenvolvendo a condição $\frac{2}{x-1} \neq -3$ proveniente da expressão do domínio $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \wedge \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}\}$, como se pode ver na figura seguinte. Este grupo acabou por não desenvolver corretamente as condições presentes no conjunto que definiram para este domínio.

$$g \circ f = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \wedge \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}\}$$

Figura 45 - Resolução de parte (domínio de gof) da alínea b) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Beatriz - grupo g

3. Análise de resultados

Quanto ao domínio de fof (na figura seguinte), pode-se verificar que se enganaram, escrevendo fog novamente, mas pelas condições presentes no conjunto que definiram como domínio, percebe-se que isto foi meramente um lapso. As alunas escreveram o conjunto com as condições necessárias contudo, não as tentaram desenvolver.

$$f \circ g = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \wedge \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$$

Figura 46 - Resolução de parte (domínio de fof) da alínea b) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Beatriz - grupo g

Pelas resoluções da tarefa 4, ambas as alunas assimilaram como determinar o domínio de uma função composta, mesmo com as dificuldades no desenvolvimento de condições.

A resolução da tarefa 5 da ficha exigia que as alunas explorassem a expressão do domínio de uma função composta e das condições que iriam obter. Pelas condições do domínio de uma função composta os alunos iriam chegar a uma condição impossível. Este grupo não enveredou por esta via, tentando determinar apenas a expressão algébrica de gof (ver figura seguinte) e portanto, não conseguiu resolver a tarefa. No entanto, as alunas aplicaram corretamente a definição de expressão algébrica de uma função composta, o que evidencia ainda mais que estas alunas se apropriaram do conceito de expressão algébrica de uma função composta.

$$g \circ f \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
$$g[f(x)]$$
$$g[-\text{sen}(x)] = \begin{cases} \frac{1}{-\text{sen}\, x + 1}, & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{-\text{sen}\, x - 1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Figura 47 - Resolução da tarefa 5 (ficha de tarefas) – Beatriz – grupo g

Pela análise das resoluções do teste de avaliação pelos dois elementos do grupo g, pode-se verificar aprendizagem do conceito de função composta.

O primeiro elemento do grupo – a Beatriz - revelou saber determinar a expressão algébrica e o domínio da função composta. Porém, ao calculá-lo, revelou ainda não dominar a determinação do conjunto de solução de uma inequação. Nesta resolução, também se pode encontrar algumas falhas de linguagem simbólica, como se pode ver na figura seguinte.

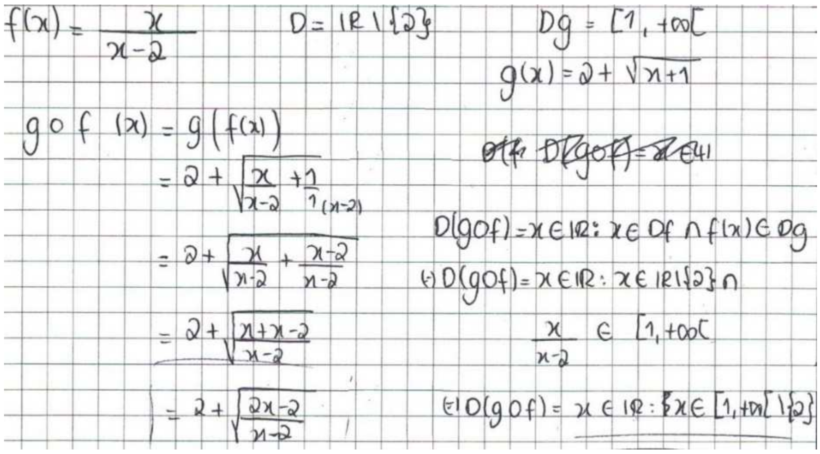


Figura 48 - Resolução da Beatriz - grupo g – à questão do teste

O segundo elemento do grupo – a Bianca - revelou um verdadeiro domínio do conceito de função composta, tanto ao nível da expressão algébrica, como ao nível do domínio. Na figura seguinte, pode-se notar algumas falhas de linguagem simbólica.

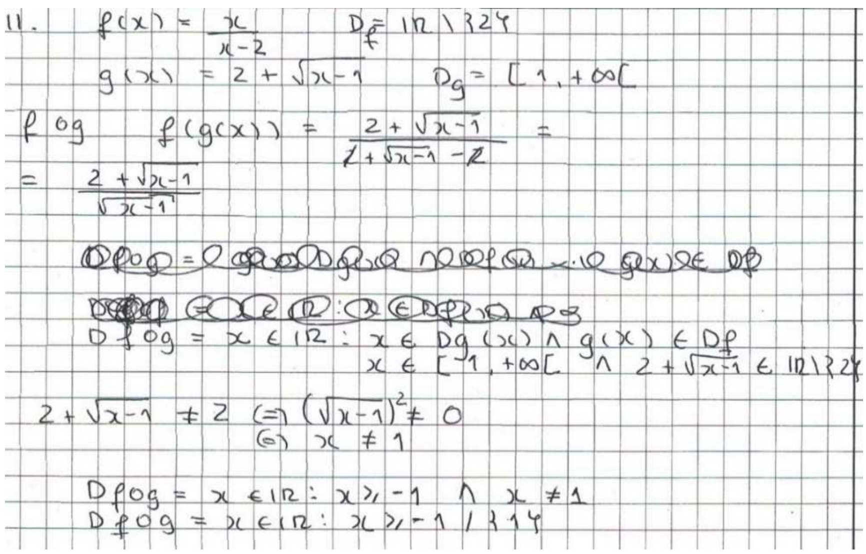


Figura 49 - Resolução da Bianca - grupo g – à questão do teste

3.4.2. Motivação

Neste espaço, analisa-se a motivação das alunas do grupo g ao longo das aulas através dos diários de bordo e dos questionários.

Ao longo de ambas as aulas deste estudo, as duas alunas envolveram-se na resolução das tarefas propostas, interessando-se e tirando dúvidas quando era necessário. Este comportamento já é normal para a Beatriz, que já é por norma uma aluna intrinsecamente motivada na Matemática, no entanto não era tão normal à Bianca. Em comparação com as aulas normais de Matemática, a Bianca pareceu envolver-se e interessar-se mais, especialmente na aula com recurso ao GeoGebra. Portanto, no decurso da primeira aula deste estudo a Bianca evidenciou envolver-se mais.

Analisam-se, agora, os questionários preenchidos por ambos os membros do grupo g.

A Beatriz descreveu a experiência das duas aulas como cativantes e inovadoras. Destacou como aspeto negativo o facto de "Não haver exercícios prévios que nos fizessem perceber a aplicação prática dos conhecimentos (das definições)". Salientou que um dos aspetos positivos destas duas aulas foi a "Aplicação do conhecimento". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu, um 4 em como achou interessante. Concordou que ambas as aulas foram motivantes e afirmou ter-se empenhado nas mesmas.

A Bianca descreveu a experiência das duas aulas como inovadora. O aspeto negativo que realçou foi o "Não resolver exercícios antes de fazer algo (na aplicação de conhecimentos)", enquanto que um aspeto positivo que destacou foi o "Tentar arranjar várias maneiras [de] ensinar aos alunos os conhecimentos em aprendizagem". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 2 em como aprendeu, um 2 em como se divertiu, um 3 em como achou interessante. Não achou as aulas nem motivantes, nem desmotivantes. Também referiu que não entendeu o que era suposto fazer nas aulas, no entanto considerou ter-se empenhado nas mesmas.

3.5. Grupo i

Note-se que este é o grupo que tinha três elementos e, simultaneamente, é o grupo que tinha o elemento com falta de motivação (Nilce). Um outro elemento (Neusa) é uma aluna que revelava dificuldades em sala de aula, sendo que, por vezes, tinha dificuldade acompanhar o ritmo da aula. O último membro pertencente a este grupo era a Natália. Apesar da Nilce não estar motivada a aprender Matemática, a Neusa era uma aluna extrinsecamente motivada dado que, apesar de se tentar envolver, revelava preocupar-se mais com as classificações finais da disciplina. Já a Natália era extrinsecamente motivada revelando, por vezes, um desinteresse na participação nas aulas de Matemática.

3.5.1. Composição de funções

Na figura seguinte encontram-se os resultados dos documentos entregues, segundo os critérios de avaliação determinados, do grupo i obtidas do guião da primeira aula, separado em suporte digital e em suporte papel, do trabalho de casa, da ficha da segunda aula e do teste.

nome	grupo	Primeira aula				Trabalho de casa	Segunda aula	Teste
		Tarefa 1		Tarefa 2			Ficha de tarefas	
		produção digital (GeoGebra)	produção escrita	produção digital (GeoGebra)	produção escrita			
Neusa	i	80%	57%	0%	0%	100%	48%	20%
Natália			65%		0%	85%	48%	99%
Nilce			62%		0%	85%	42%	70%

Tabela 8 - Classificações gerais - grupo i

Neste espaço, encontra-se a análise do documento entregue em GeoGebra com a resolução do guião de tarefas.

As construções realizadas vão todas ao encontro do que o guião indicava. Este grupo falha apenas por não ter representado as funções compostas. Encontra-se, na figura seguinte, uma ilustração do documento aqui em análise.

3. Análise de resultados

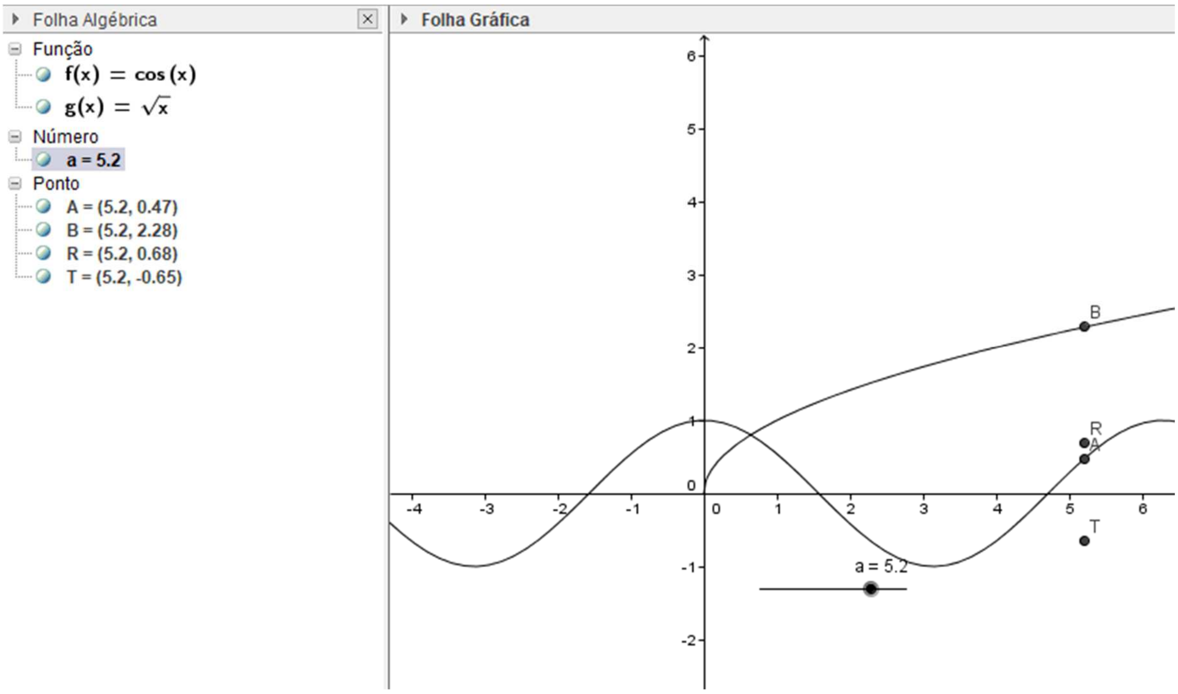


Figura 50- Resolução no GeoGebra da primeira tarefa - grupo i

As alunas construíram o seletor a inteiramente como foi pedido, inclusive o mínimo e o máximo. Ambas as funções f e g também foram representadas corretamente, assim como todos os pontos $A = (a, f(a))$, $B = (a, g(a))$, $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ e $R = \left(a, g\left(f(a)\right)\right)$, tal como a maioria dos restantes grupos.

Relativamente às tarefas em suporte papel, na questão 1.1, que trata a função composta $(fog)(x) = \cos(\sqrt{x})$, as alunas aperceberam-se corretamente que o ponto $T = (x, \cos(\sqrt{x}))$ só está definido para abcissas não negativas. No entanto, este grupo afirmou, erradamente, que quando a abcissa de T aumenta, a sua ordenada diminui. Como aconteceu, por exemplo, com o grupo b, este grupo também constatou que T e $A = (a, \cos(a))$ coincidem quatro vezes o que, como já foi mencionado, é verdade para o zoom pré-definido da janela do GeoGebra. No entanto, caso as alunas tivessem alterado a janela, poderiam verificar que o número não é somente quatro. As alunas destacaram-se dos restantes grupos pois constataram que quando a abcissa de T é superior ou igual a 9,8 a sua ordenada passa a ser -1. Pode-se verificar, na figura seguinte, as observações agora analisadas. Note-se que a resposta foi igual para as três alunas, tal como a grande parte do restante guião.

3. Análise de resultados

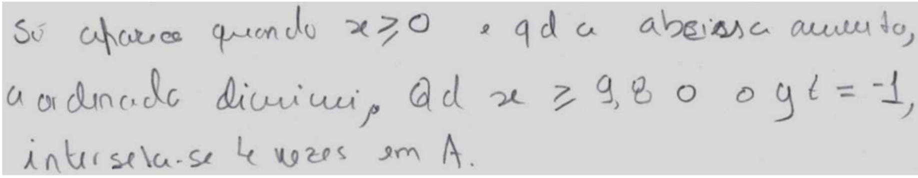
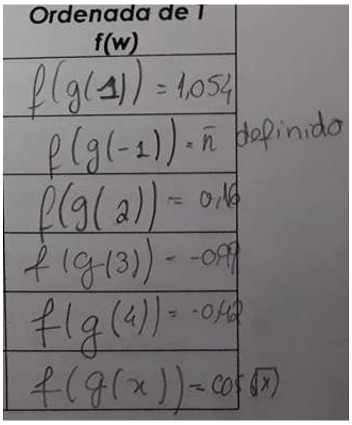

Só aparece quando $x \geq 0$ e qd a abcissa aumenta, a ordenada diminui, Qd $x \geq 9,8$ o o gt $= -1$, intersecta-se 4 vezes em A.

Figura 51 - Resolução de parte da alínea a) de 1.1 (guião de tarefas) -Neusa - grupo i

Ao resolver as restantes alíneas da questão 1.1, os elementos do grupo conseguiram preencher a tabela de fog quase corretamente. Como se pode verificar na figura seguinte, na coluna correspondente a fog a Nilce falhou para $f\big(g(1)\big) = 1{,}054$ quando deveria de ser 0,54 e $f\big(g(3)\big) = -0{,}99$ quando deveria ser $f\big(g(3)\big) = -0{,}16$. No caso de $f\big(g(3)\big)$, a aluna parece ter preenchido como sendo a imagem pela função f (isto é, $f(3) = -0{,}99$). As restantes alunas entregaram uma resolução semelhante.



Ordenada de f f(w)	
$f(g(1)) = 1{,}054$	
$f(g(-1)) = \tilde{n}$	definido
$f(g(2)) = 0{,}16$	
$f(g(3)) = -0{,}99$	
$f(g(4)) = -0{,}42$	
$f(g(x)) = \cos(\sqrt{x})$	

Figura 52 - Resolução da alínea b) de 1.1 (guião) -Nilce - grupo i

Na alínea c) da questão 1.1, determinaram corretamente a expressão analítica de fog. Como se pode verificar na figura seguinte, as alunas apenas colocaram a expressão algébrica da função, sendo que a única justificação dos seus passos encontra-se na última linha da tabela da figura anterior. Deste modo, as alunas conseguiram mobilizar os conceitos prévios com o recurso ao GeoGebra para determinar a expressão algébrica de fog sem a formalização deste conceito.

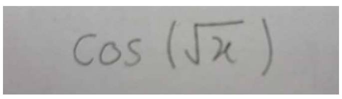

$\cos(\sqrt{x})$

Figura 53 - Resolução da alínea c) de 1.1 (guião de tarefas) - Nilce - grupo i

3. Análise de resultados

As alunas também determinaram corretamente o domínio de fog, novamente, conseguiram mobilizar os conhecimentos prévios com o recurso ao GeoGebra sem que o domínio da função composta tenha sido lecionado formalmente em sala de aula.

Na questão 1.2, questão esta que trata a função $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$, na alínea a), os membros do grupo constataram corretamente que R= $(x, \sqrt{\cos(x)})$ apenas assume ordenadas positivas (ver figura seguinte).

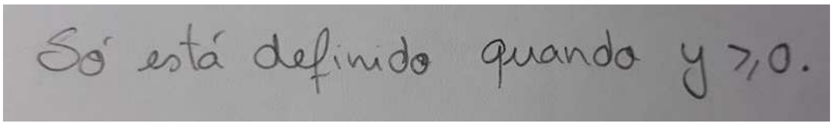


Figura 54 - Resolução de parte da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) - Natália - grupo i

As alunas ainda observaram corretamente que R não está definido para abcissas pertencentes a $]-4,-2]$ nem pertencentes a $[8,11]$, errando apenas em considerar o intervalo $[8,11[$ fechado à direita (figura seguinte).

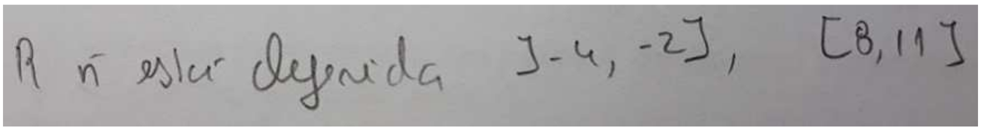


Figura 55 - Resolução de parte da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) - Neusa - grupo i

Contudo, este grupo não conseguiu determinar acertadamente a expressão algébrica ou o domínio de gof. Para a expressão algébrica as alunas determinaram que era $(gof)(x) = \cos(x)$ em vez de $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$ não justificando nenhum raciocínio como se pode ver na figura seguinte. Tal poderá dever-se ao facto das representações gráficas destas duas expressões algébricas serem muito semelhantes, ainda que apenas para o domínio de gof ($D_{gof} = \mathbb{R} \backslash \left\{\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}\right\}$).

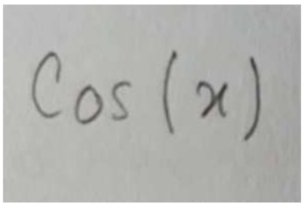


Figura 56 - Resolução da alínea c) de 1.2 (guião de tarefas) - Nilce - grupo i

3. Análise de resultados

Este grupo não resolveram a questão 1.3 nem a tarefa 2, devido a terem demorado muito tempo no restante guião.

Analise-se, agora, o trabalho de casa que as alunas do grupo i entregaram.

A Neusa, cuja resolução se encontra na figura seguinte, resolveu corretamente por inteiro a tarefa proposta.

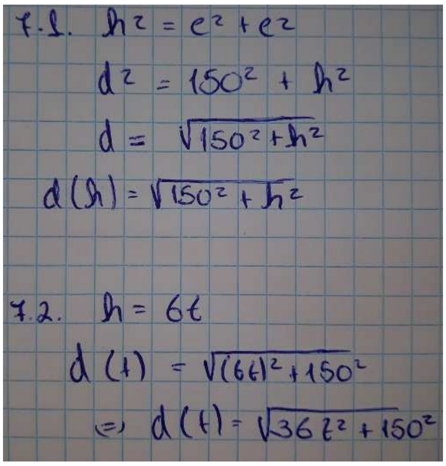


Figura 57 - Resolução da tarefa 7 (trabalho de casa) -Neusa - grupo i

Quanto à resolução da Natália (ver figura seguinte) e da Nilce, também cada um delas resolveu o trabalho de casa corretamente (ambas as resoluções são muito similares), falhando apenas em não justificar a equivalência $d^2 = h^2 + 150^2 \Leftrightarrow d^2 = \sqrt{h^2 + 150^2}$ (d é distância e, por isso, sempre positivo) como, por exemplo, as alunas do grupo g.

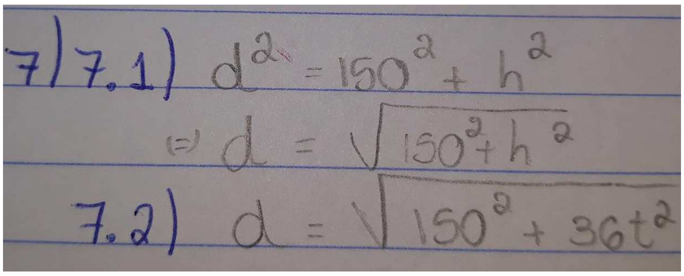


Figura 58 - Resolução da tarefa 7 (trabalho de casa) -Natália - grupo i

Todas as alunas deste grupo evidenciaram saber determinar a expressão algébrica de uma função composta num contexto real, mesmo sem existir ainda a formalização do contexto, ainda que a um nível de dificuldade reduzido.

3. Análise de resultados

Neste espaço encontra-se a análise das resoluções da ficha de tarefas realizadas pelo grupo i na segunda aula.

A tarefa 1 foi realizada corretamente pelas três alunas (esta tarefa tal como as restantes tarefas desta ficha foi resolvida de modo muito semelhante pelas alunas), como se pode verificar na figura seguinte, revelando que as alunas se apropriaram de como determinar a expressão algébrica de uma função composta, aplicando-a aqui num contexto real.

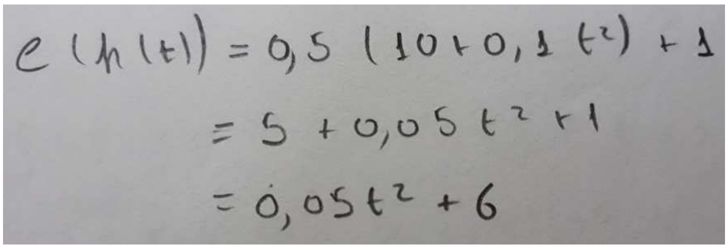


Figura 59 - Resolução da tarefa 1 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Na segunda tarefa, as alunas evidenciaram dificuldades, sendo que, durante a aula, pôde verificar-se que não estavam a compreender o enunciado. Nesta tarefa, o grupo i acabou por não conseguir resolver as alíneas b) e c). Já em relação à alínea a), a Neusa e a Natália conseguiram resolver de modo semelhante (ver figura seguinte), enquanto que a Nilce (elemento desmotivado) acabou por não preencher nada no espaço destinado à resolução (na ficha).

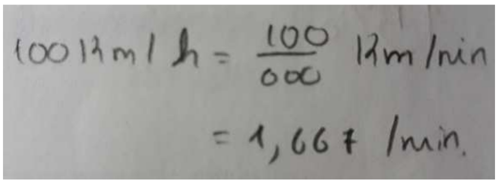


Figura 60 - Resolução da alínea a) da tarefa 2 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Relativamente à tarefa 3, o grupo, por inteiro, conseguiu aplicar a definição de função composta para um dado ponto, o que também evidencia o facto das alunas se terem apropriado de como determinar a expressão algébrica de uma função composta. Sendo que tanta a Natália como a Neusa justificaram o raciocínio a lápis, como se pode ver na figura seguinte.

3. Análise de resultados

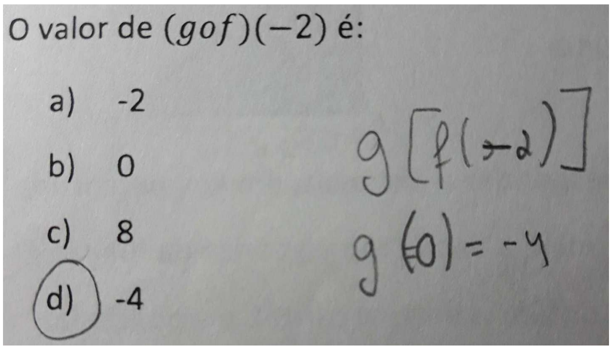


Figura 61 - Resolução da tarefa 3 (ficha de tarefas) - Natália - grupo i

Este grupo acabou por se destacar de um modo positivo na resolução da tarefa 4.

Na alínea a) o enunciado pedia aos alunos que determinassem o domínio das funções $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $(D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\})$ e $g(x) = \frac{1}{x+3}$ $(D_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$. As três alunas determinaram corretamente ambos os domínios (figura seguinte).

Figura 62 - Resolução da alínea a) da tarefa 4 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Na alínea b), tal como o grupo g, apenas tentaram determinar os domínios das funções compostas, negligenciando a expressão algébrica, provavelmente por distração. Esta alínea explorava as funções compostas fog, gof e fof.

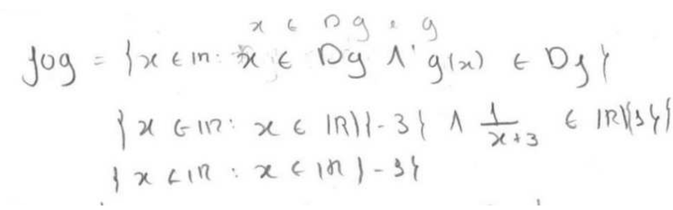


Figura 63 - Resolução de parte da alínea b) (fog) da tarefa 4 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Quanto à função composta fog, como se pode ver na figura anterior, desenvolveu erradamente a condição $g(x) \in D_f$, que substituindo é $\frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Como se pode ver na figura seguinte, a Neusa desenvolveu a condição $\frac{1}{x+3} \neq 1$ equivalendo-a primeiro a $\frac{1}{x+3} - 1 \neq 0$ corretamente porém, no passo seguinte, enganou-se e equivaleu esta condição a

$\frac{-x-2}{x+3} = 0$ na vez de $\frac{-x-2}{x+3} \neq 0$, deste modo a aluna obteve a condição $x = 2 \wedge x \neq 0$ (deveria de obter $x \neq 2 \wedge x \neq 0$). Apenas a Neusa justificou este passo, a Neusa e a Natália resolveram de igual modo, não justificaram este passo. Deste modo, as alunas mostram apenas dificuldades no desenvolvimento das condições e não na determinação do domínio da função composta.

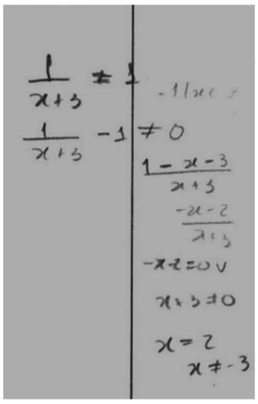


Figura 64 - Resolução de parte da alínea b) (fog) da tarefa 4 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Quanto à função composta gof, as alunas indicaram corretamente a expressão algébrica do domínio da função composta e substituíram adequadamente as expressões de f e g, assim como os seus domínios, mas não desenvolveram nas condições (figura seguinte).

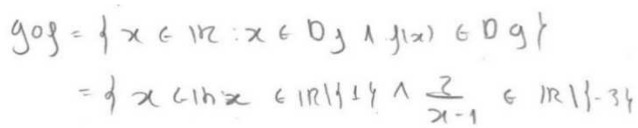


Figura 65 - Resolução de parte da alínea b) (gof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

Quanto à função composta fof, tal como na função composta anterior, as alunas indicaram corretamente a expressão algébrica do domínio da função composta e substituíram-na adequadamente. Contudo, não desenvolveram as condições (ver figura seguinte).

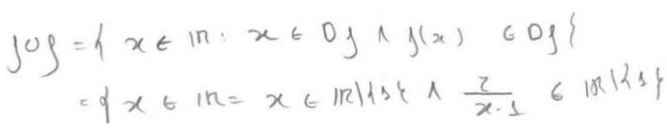


Figura 66 - Resolução de parte da alínea b) (fof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) - Neusa - grupo i

3. Análise de resultados

Assim sendo, as alunas evidenciaram saber determinar os domínios de funções compostas, mesmo tendo dificuldades no desenvolvimento de algumas condições.

Na tarefa 5, tal como o grupo g, o grupo i tentou resolver a tarefa, determinando a expressão algébrica da função composta (figura seguinte), todavia esta tarefa requeria que os alunos analisassem o domínio, para que concluissem que gof não existe. Pelas condições do domínio de uma função composta as alunas iriam chegar a uma condição impossível. Como este grupo não enveredou por esta via, não conclui que gof não existe. No entanto, as alunas aplicaram corretamente a definição de expressão algébrica de uma função composta, o que evidencia que estas alunas se apropriaram do conceito de expressão algébrica de uma função composta.

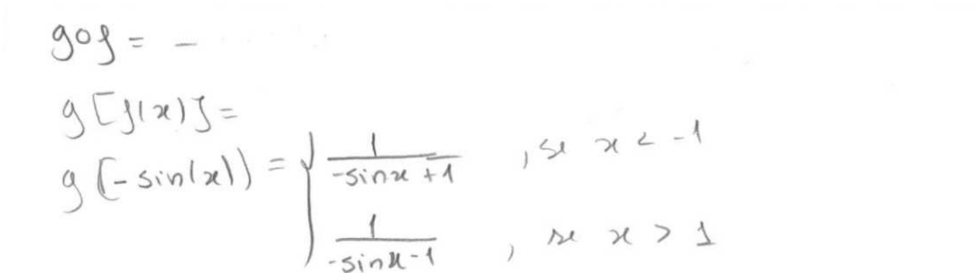


Figura 67 - Resolução da tarefa 5 (ficha de tarefas) – Neusa- grupo i

De seguida, analisam-se as resoluções dos três elementos do grupo i do teste de avaliação.

A Neusa revelou não ter compreendido na sua integra o conceito de composição de funções. Como se pode verificar na figura seguinte, não determinou a expressão algébrica da função composta. Já no que se refere ao domínio, apesar de apresentar alguns erros na determinação de inequações, conseguiu aplicar a definição.

3. Análise de resultados

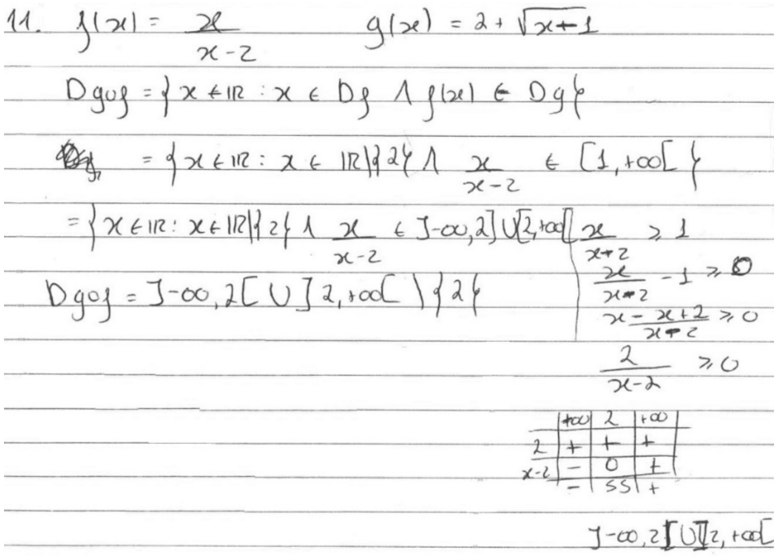


Figura 68 - Resolução da Neusa - grupo i – à questão do teste

A Natália destacou-se positivamente, revelando uma consolidada aprendizagem do conceito de função composta. Examinando detalhadamente a expressão algébrica e o domínio determinados (figura seguinte), pode-se verificar que a aluna compreendeu o conceito na sua íntegra, revelando apenas alguma distração na linguagem simbólica.

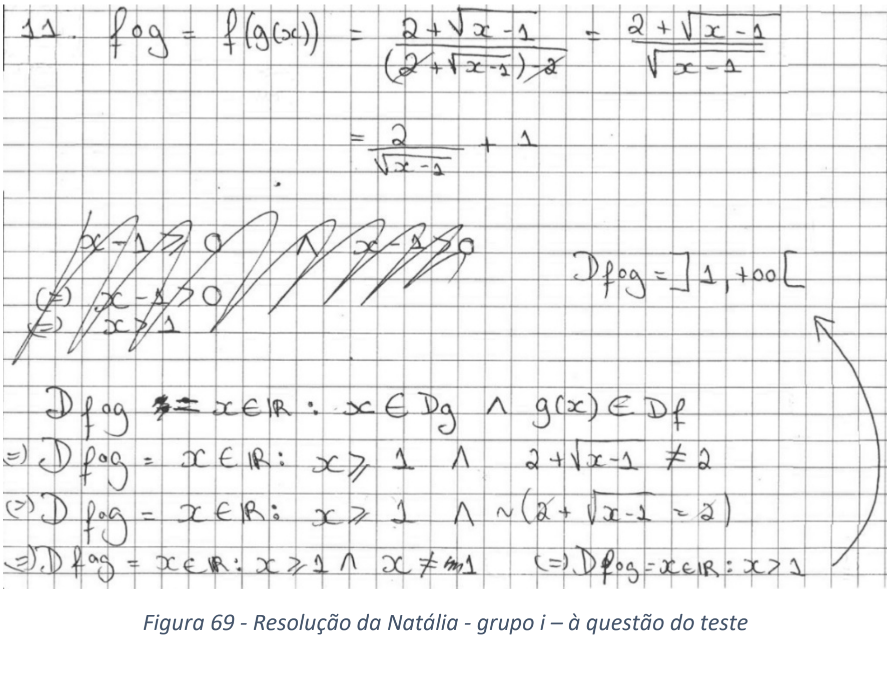
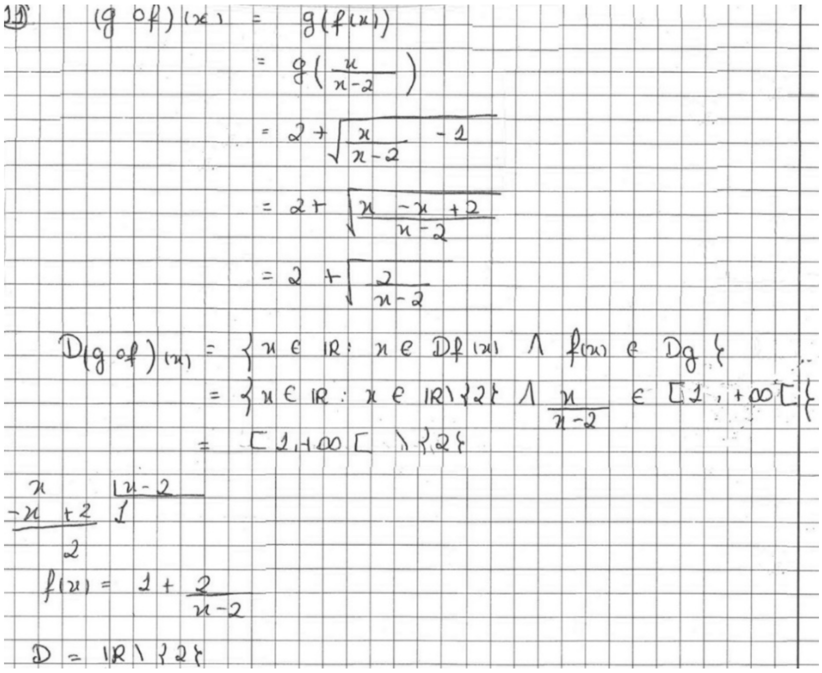


Figura 69 - Resolução da Natália - grupo i – à questão do teste

A Nilce, tal como a Natália, destacou-se positivamente revelando que compreendeu o conceito de função composta. A expressão algébrica e o domínio foram determinados corretamente, porém a aluna não explicou alguns dos passos intermédios na resolução de condição $\frac{x}{x-2} \in [1, +\infty[$ (figura seguinte).



1.1) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$= 2 + \sqrt{\frac{x}{x-2} - 1}$

$= 2 + \sqrt{\frac{x - x + 2}{x-2}}$

$= 2 + \sqrt{\frac{2}{x-2}}$

$D_{(g \circ f)(x)} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{f(x)} \wedge f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \wedge \frac{x}{x-2} \in [1, +\infty[\}$

$= [1, +\infty[\setminus \{2\}$

$\begin{array}{r|l} x & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \\ 2 & \end{array}$

$f(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Figura 70 - Resolução da Nilce - grupo i – à questão do teste

3.5.2. Motivação

Neste espaço, analisa-se a motivação das alunas do grupo i ao longo das aulas através dos diários de bordo e dos questionários.

Ao longo de ambas as aulas deste estudo, as alunas envolveram-se na resolução das tarefas propostas. Em comparação com as restantes aulas de Matemática, notou-se algumas melhorias no que se refere à participação em sala de aula. Ainda assim, durante toda a primeira aula de resolução deste guião, este grupo revelou pouco interesse, sendo o grupo que menos se empenhou nas tarefas e que, mesmo com a disponibilidade da investigadora para ultrapassar quaisquer dificuldades que pudessem surgir, se dedicou mais ao diálogo de assuntos não relacionados com a temática que estava a ser explorada em sala de aula. Porém, como já foi mencionado, comparativamente às restantes aulas, todos os elementos do grupo se envolveram mais na resolução das tarefas, tentando procurar respostas. Tendo dificuldades no uso do GeoGebra, pediram ajuda à professora investigadora. Esta mudança de comportamento é muito contrastante com as outras aulas de matemática pois, nestas e apesar de todos os esforços das professoras, as alunas apenas conversavam, não se empenhando na maioria das tarefas propostas pela professora titular.

De seguida, dissecam-se os questionários preenchidos pelos membros do grupo i.

A Neusa descreveu a experiência das duas aulas como dinâmica e inovadora, ainda que ligeiramente confusa, principalmente no que se refere ao GeoGebra. Esta aluna considerou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu, um 4 em como achou interessante. Esta aluna não considerou as aulas nem desmotivantes, nem motivantes. Assinalou não ter entendido o que era suposto fazer, mas também ter-se empenhado nas aulas. A aluna sugeriu que a teoria devia "ser dada de forma mais simples" e que as aulas precisam de ser mais esclarecedoras.

A Natália descreveu a experiência das duas aulas como diferente, dinâmica inovadora, ainda que um pouco confusa "o que fez com que não percebesse totalmente algumas definições". Destacou que "É uma forma mais "prática" de adquirir conhecimentos, o que a torna mais apelativa". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 2 em como se divertiu, um 3 em como achou interessante. Também não considerou as aulas nem desmotivantes, nem motivantes. Considerou ter-se empenhado no decurso de duas as aulas.

A Nilce descreveu a experiência das duas aulas como inovadora, ainda que um pouco confusa. Destacou que gostou "do facto de termos realizado uma atividade interativa". Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 2 em como aprendeu, um 2 em como se divertiu, um 3 em como achou interessante. Revelou não ter entendido o que era suposto fazer, todavia afirma haver-se empenhado nas mesmas.

3.6. Grupo j

Este grupo era constituído pelo Lucas e pela Linda. O Lucas era um aluno que apresentava falta de motivação na aula de matemática. A Linda era uma aluna que apresentava, de vez em quando, algumas dificuldades, mas era empenhada em ultrapassá-las em sala de aula, pedindo ajuda sempre que achava necessário. A Linda era uma aluna extrinsecamente motivada, porque, apesar de ser das alunas que mais se empenhava nas aulas de Matemática, o seu objetivo final era alcançar uma boa classificação final.

3.6.1. Composição de funções

Na figura seguinte, apresentam-se as classificações gerais que ambos os alunos do grupo j obtiveram no guião da primeira aula, separado em suporte digital e em suporte papel, no trabalho de casa, na ficha da segunda aula e no teste.

nome	grupo	Primeira aula				Trabalho de casa	Segunda aula	Teste
		Tarefa 1		Tarefa 2			Ficha de tarefas	
		produção digital (GeoGebra)	produção escrita	produção digital (GeoGebra)	produção escrita			
Lucas	j	95%	67%	0%	0%	85%	55%	100%
Linda			67%		0%	85%	56%	61%

Tabela 9 - Classificações gerais - grupo j

Neste espaço encontra-se em análise o documento em GeoGebra entregue pelo grupo j relativo à resolução das tarefas propostas. Pode-se verificar, na figura seguinte, um *printscreen* deste mesmo documento.

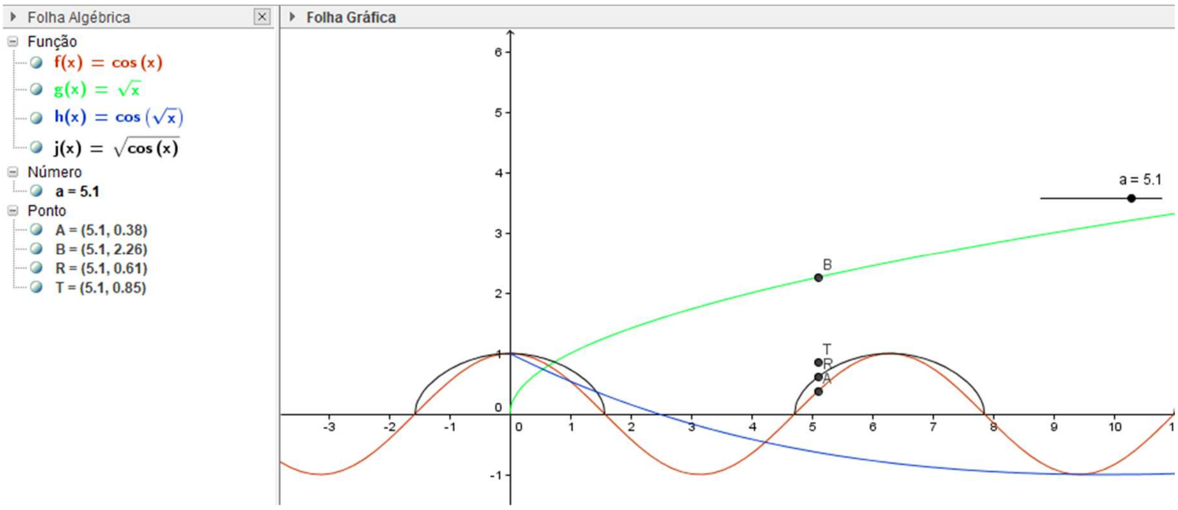


Figura 71 - Resolução no GeoGebra da primeira tarefa - grupo j

De um modo geral, este grupo concretizou corretamente as suas construções, tal como os restantes grupos da turma.

O seletor foi construído corretamente, sendo denominado por a e tendo -10 com mínimo e 10 como máximo, como o guião requeria. As funções f e g foram também corretamente representadas e os pontos destas, cuja abcissa era a variável do seletor - $A = (a, f(a))$ e $B = (a, g(a))$, respetivamente. Recorde-se que os pontos $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ e $R = \left(a, g\left(f(a)\right)\right)$ pertencem às funções compostas fog e gof (respetivamente), tendo como abcissa também a variável a do seletor. Os alunos determinaram corretamente o ponto R, porém construíram T como sendo $(a, f(a)g(a))$. Esta foi a única construção em GeoGebra que os alunos não realizaram corretamente. Isto poderá ter sido, apenas, uma distração na construção, dado que este grupo representou ambas as funções compostas fog e gof corretamente, denominando-as de h e j, respetivamente.

Este grupo não resolveu a segunda tarefa derivado à falta de tempo.

Analise-se, agora, a resolução do grupo j da primeira tarefa do guião da primeira aula em suporte papel.

Note-se que também os membros deste grupo entregaram os seus guiões com respostas muito similares.

A questão 1.1 explora a função composta $(fog)(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$. Ao construir o ponto T, como pode ser observado na figura seguinte, em vez de considerarem $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$ os alunos consideraram $T = (a, f(a)g(a))$ e as conclusões que retiraram são algo irrelevantes para a exploração da função composta.

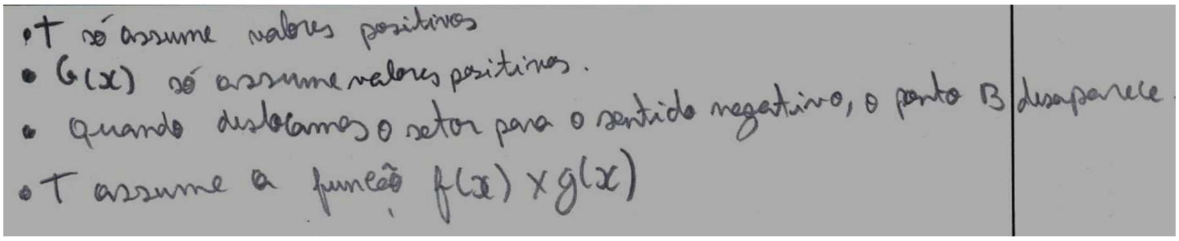


Figura 72 - Resolução de parte da alínea a) de 1.1 (guião de tarefas) – Lucas - grupo j

Estes alunos conseguiram preencher a tabela da alínea b) da questão 1.1 (fog) e também determinaram corretamente a expressão algébrica de fog (alínea b) da questão 1.1). Contudo, determinaram incorretamente o seu domínio (alínea c) da questão 1.1), por causa da linguagem simbólica usada, aparentam perpetuar o erro da alínea a) (os alunos construíram $T = (a, f(a)g(a))$ em vez de $T = \left(a, f\left(g(a)\right)\right)$). A razão pela qual os alunos terão preenchido a tabela e determinado a expressão algébrica corretamente provavelmente dever-se-á à forma como o cabeçalho da tabela foi construído (ver figura seguinte).

a	f(a)	w=g(a)	Ordenada de T f(w)
1	0,54	1.	0,54.
-1	0,54	/	/
2	-0,42	1,41	-0,59
10	-0,84	3,16	-2,65
-5	0,28	/	/
x	cos(x)	$\sqrt{x}$	cos$\sqrt{x}$

Figura 73 - Resolução da alínea b) de 1.1 (guião de tarefas) – Linda - grupo j

Como a alínea que pede aos alunos a expressão algébrica para fog (c)) é a alínea imediatamente a seguir da alínea que pede a tabela (b)), o cabeçalho poderá ter sido a razão pela qual os alunos terão respondido corretamente. Uma vez que para a coluna referente a fog (última coluna) pede $f(W)$, sendo $W = g(a)$. Como se pode ver na figura seguinte, os alunos apenas indicaram, a expressão algébrica de fog denominando a função de h.

$$h(x) = \cos\sqrt{x}$$

Figura 74 - Resolução da alínea c) de 1.1 (guião de tarefas) – Linda - grupo j

Analise-se, agora, a questão 1.2 que explora a função composta $(gof)(x) = \sqrt{\cos(x)}$. Da construção do ponto $R = (a, \sqrt{\cos(a)})$, os alunos observaram corretamente que, quando está definido, a sua ordenada é sempre não negativa, como se pode verificar na figura seguinte. Ainda observaram corretamente que R não está definido para $x \in [2,4]$.

3. Análise de resultados

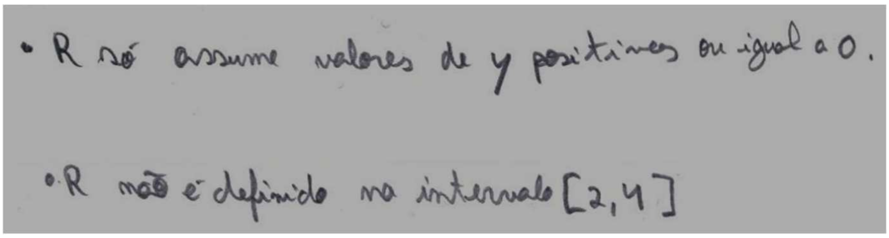


Figura 75 - Resolução da alínea a) de 1.2 (guião de tarefas) – Lucas - grupo j

No caso da função composta em análise (gof), os alunos representaram de forma irrepreensível a função através da tabela.

Na alínea c) da questão 1.2, os alunos determinaram também corretamente a sua expressão algébrica, denominando a função de j (ver figura seguinte). Deste modo, os alunos foram capazes de mobilizar os conhecimentos prévios com recurso ao GeoGebra para resolverem uma tarefa que envolvia conceitos ainda não formalizados em sala de aula.

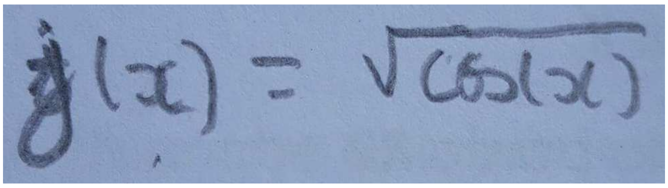


Figura 76 - Resolução da alínea c) de 1.2 (guião de tarefas) – Lucas - grupo j

A alínea d) requeria aos alunos que determinassem o domínio da função composta gof. Nesta alínea, os alunos determinaram o domínio como sendo $D_j =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (ver figura seguinte). Este conjunto corresponde a um intervalo facilmente identificável no círculo trigonométrico dada a expressão analítica de gof, mas somente contempla parte deste domínio, sendo que o domínio é $D_{gof} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z} \right\}$, e é aberto em ambos os extremos quando deveria ser fechado. Assim sendo, os alunos conseguiram também aqui mobilizar os conhecimentos prévios com recurso ao GeoGebra para resolver uma tarefa que envolve o domínio de uma função composta, conceito este que ainda não tinha sido formalizado em sala de aula.

3. Análise de resultados

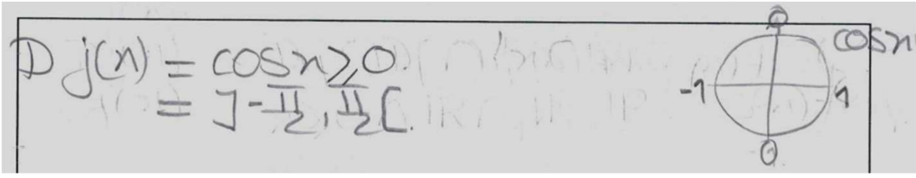


Figura 77 - Resolução da alínea d) de 1.2 (guião de tarefas) – Linda - grupo j

Ao comparar ambas as representações gráficas das funções compostas fog e gof, os alunos apenas observaram não eram de todo semelhantes.

Devido à falta de tempo, este grupo não resolveu a segunda tarefa.

Analise-se, agora, o trabalho de casa entregue por cada um dos elementos do grupo j.

As resoluções de ambos alunos são muito similares, sendo que ambos apenas falharam por não justificarem a relação de equivalência $d^2 = 150^2 + h^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{150^2 + h^2}$ (d é uma distância e, por isso, sempre positiva) na alínea 7.1, tal como, por exemplo, o grupo g (ver figura seguinte).

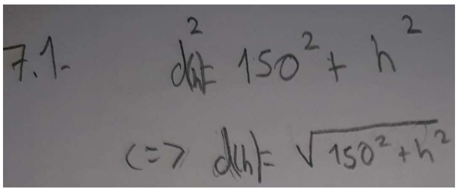


Figura 78 - Resolução da alínea 7.1 (trabalho de casa) -Lucas - grupo j

Os dois alunos deste grupo evidenciaram saber determinar a expressão algébrica de uma função composta num contexto real, mesmo sem existir ainda a formalização do contexto, ainda que a um nível de dificuldade reduzido.

Analise-se, agora, as fichas de tarefas entregues pelo grupo j. Note-se que também aqui as resoluções entregues por cada um dos dois alunos eram muito semelhantes.

Tanto o Lucas como a Linda iniciaram a primeira tarefa da ficha relativa à segunda aula sem dificuldades aparentes, tal a maioria dos restantes membros da turma. Conseguiram determinar a expressão algébrica de uma função composta num contexto real e não tão abstrato, como se pode verificar na figura seguinte. Isto evidencia que os alunos assimilaram como determinar a expressão algébrica de uma função composta.

3. Análise de resultados

$$
\begin{aligned}
C(p(t)) &= 0{,}5 \times (10 + 0{,}1t^2) + 1 \\
&= 5 + 0{,}05t^2 + 1 \\
&= 0{,}05t^2 + 6
\end{aligned}
$$

Figura 79 - Resolução da tarefa 1 (ficha de tarefas) – Lucas - grupo j

No que se refere à segunda tarefa, ambos os alunos despenderam de muito tempo na resolução da alínea a), só o Lucas resolveu parte da b), enquanto que a Linda avançou na ficha, talvez por isso, ela teve mais tempo para se dedicar à tarefa 4, tarefa esta que, como se verá, o Lucas apenas explorou em parte.

Na alínea a), ambos os alunos determinaram a expressão algébrica de uma função de forma semelhante (na figura seguinte encontra-se a resolução do Lucas).

$$
\begin{aligned}
&60\,\text{min} \;\text{———}\; 100\,\text{km} \\
&1\,\text{min} \;\text{———}\; x \\
&p(t) = \frac{5}{3}t
\end{aligned}
$$

Figura 80 - Resolução da alínea a) da tarefa 2 (ficha de tarefas) – Lucas - grupo j

A Linda não conseguiu resolver a alínea b), alínea esta que pede a expressão de uma função composta, ainda que o enunciado não mencione diretamente que era uma função composta (talvez por não afirmar diretamente a função pretendida era uma função composta, a Linda não tenha conseguido compreender o enunciado), enquanto que o Lucas a resolveu corretamente como se pode ver na figura seguinte. Assim sendo, o Lucas evidencia ter assimilado como determinar a expressão algébrica de uma função composta.

$$g(x) = \left(\frac{5}{3}t\right)^2 + 2^2 \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{\frac{25}{9}t^2 + 4}$$

Figura 81 - Resolução da alínea b) da tarefa 2 (ficha de tarefas) – Lucas - grupo j

Na terceira tarefa, ambos os alunos não apresentaram dificuldade na resposta, aplicando, sem dificuldade, a definição de expressão algébrica de uma função composta (figura seguinte). Ambos os alunos anotaram a lápis o seu raciocínio, onde evidenciam novamente terem-se apropriado do conceito de expressão algébrica de uma função composta.

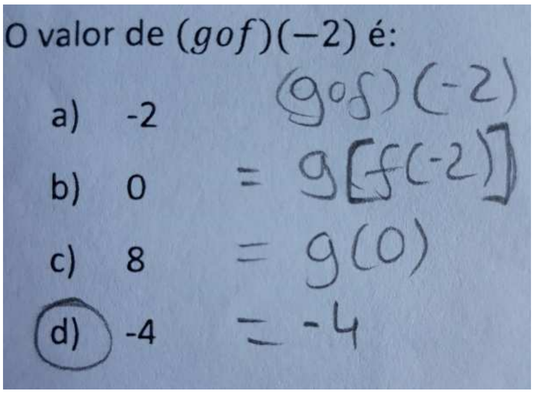


Figura 82 - Resolução da tarefa 3 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Quanto à tarefa 4, como já foi mencionado, o Lucas resolveu apenas parte, não desenvolvendo muito. O Lucas apenas determinou os domínios das funções dadas (que não eram compostas) e apontou a expressão geral para o domínio de uma função composta (figura seguinte). A Linda também resolveu corretamente a alínea a).

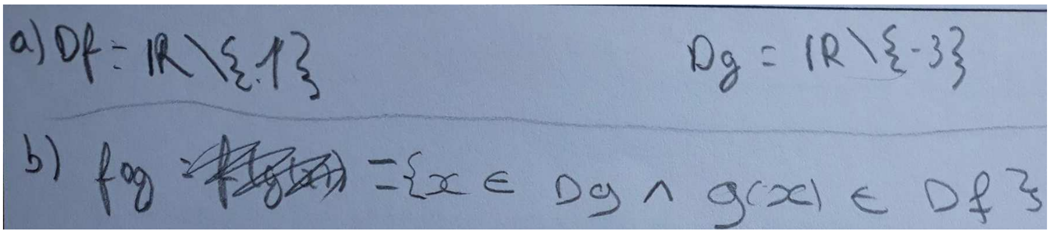


Figura 83 - Resolução da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Lucas - grupo j

Já a Linda explorou extensivamente os domínios de fog, gof e fof, falhando apenas por se esquecer que, ao se caracterizar uma função, é necessário também a respetiva expressão algébrica. Em relação a fog, como se pode verificar na figura seguinte, a Linda determinou corretamente a expressão para o domínio. Também substitui corretamente a expressão analítica de $g(x) = \frac{1}{x+3}$ e os domínios de f e g ($D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ e $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$) na mesma. Ainda desenvolveu corretamente a condição $\frac{1}{x+3} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ em $\frac{1}{x+3} \neq 1$.

3. Análise de resultados

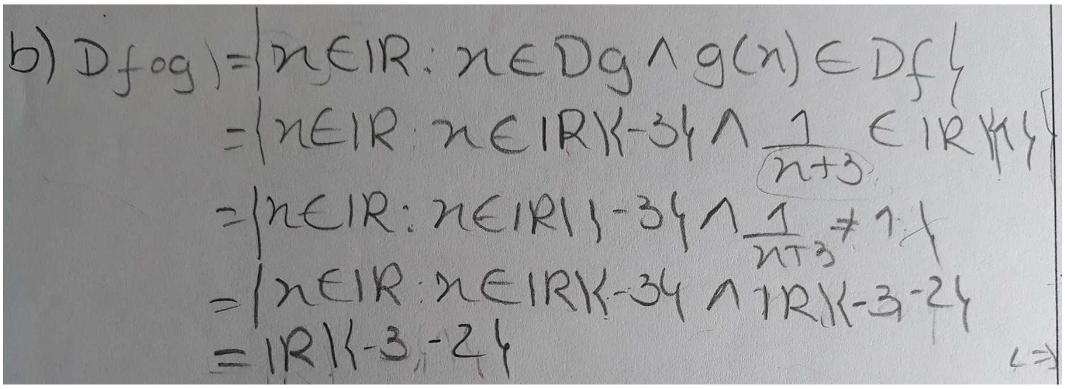


Figura 84 - Resolução da alínea b) (fog) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Na forma de cálculo auxiliar, a Linda desenvolveu à parte esta última condição (ver figura seguinte), equivalendo-a a $x = -2 \wedge x \neq -3$. Apesar de a condição equivalente ser $x \neq -2 \wedge x \neq -3$, pela resolução da figura anterior, nota-se que provavelmente tal se deveu a uma distração.

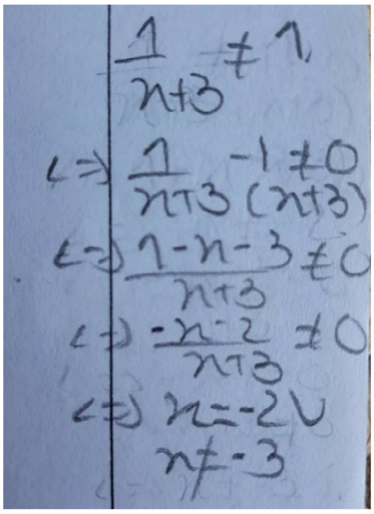


Figura 85 - Resolução da alínea b) (fog) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Em relação à função composta gof, como se pode verificar na figura seguinte, a Linda também determinou corretamente a expressão para o domínio, substituindo-a corretamente com a expressão analítica de $f(x) = \frac{2}{x-1}$ e os domínios de f e g. Ainda desenvolveu corretamente a condição $\frac{2}{x-1} \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ em $\frac{2}{x-1} \neq -3$.

3. Análise de resultados

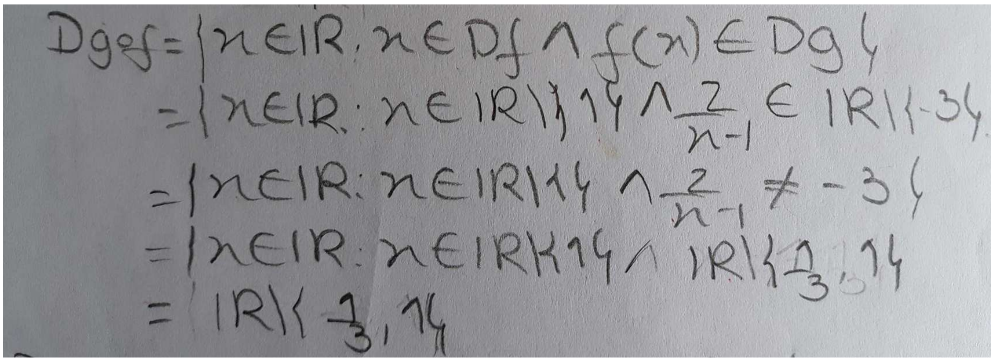


Figura 86 - Resolução da alínea b) (gof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Novamente na forma de cálculo auxiliar, desenvolveu à parte a condição $\frac{2}{x-1} = -3$ para determinar o conjunto solução de $\frac{2}{x-1} \neq -3$ (ver figura seguinte), desenvolvendo-a corretamente em $x = \frac{1}{3} \wedge x \neq 1$. Posteriormente, substituiu corretamente para a condição inicial este conjunto de solução, determinando, por fim, o domínio da função composta gof corretamente $D_{gof} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

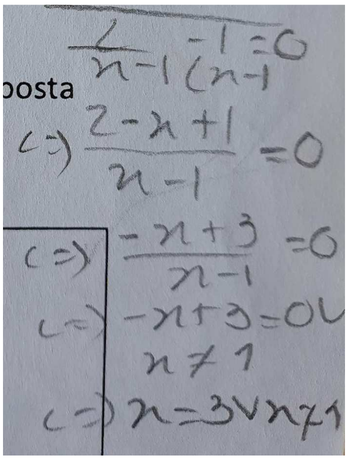


Figura 87 - Resolução da alínea b) (gof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Em relação à função composta fof, a aluna, como se pode verificar na figura seguinte, também determinou corretamente a expressão para o domínio, substituindo-a corretamente com a expressão analítica de $f(x) = \frac{2}{x-1}$ e o domínio de f, não evidenciando qualquer dificuldade em se estar a contemplar a composta de uma função por ela própria. Desenvolveu corretamente a condição $\frac{2}{x-1} \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ em $\frac{2}{x-1} \neq 1$.

3. Análise de resultados

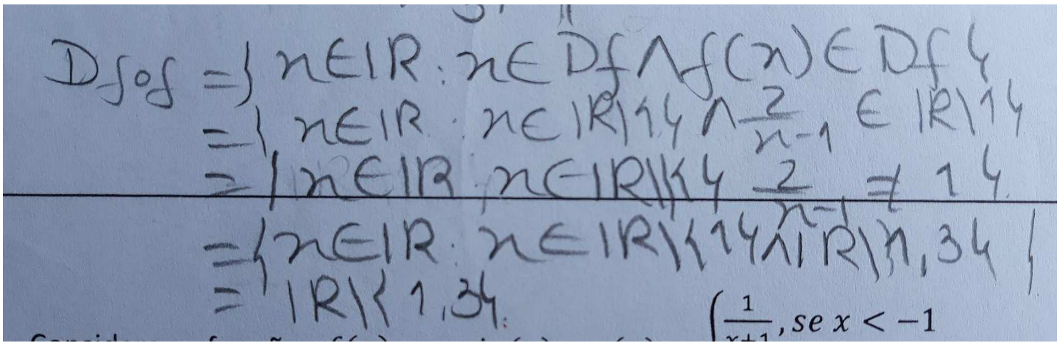


Figura 88 - Resolução da alínea b) (fof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Numa mesma estrutura de trabalho em relação às outras funções compostas desta alínea, a aluna colocou na forma de cálculo auxiliar o desenvolvimento da condição $\frac{2}{x-1} = 1$ para determinar o conjunto solução de $\frac{2}{x-1} \neq 1$ (ver figura seguinte), desenvolvendo-a em $x = 3 \vee x \neq 1$. Note-se que a aluna trocou o símbolo "$\wedge$" por "$\vee$". Provavelmente, tal dever-se-á a uma distração, uma vez que, como se pode ver na figura anterior, a aluna substituiu corretamente na expressão de D_{fof}. Acabando por determinar corretamente o domínio da função composta fof corretamente ($D_{gof} = \mathbb{R}\backslash\{1{,}3\}$).

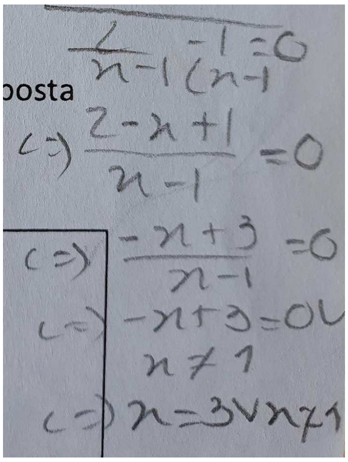


Figura 89 - Resolução da alínea b) (fof) da tarefa 4 (ficha de tarefas) – Linda - grupo j

Esta resolução evidencia que a Linda se apropriou do conceito de domínio de uma função composta.

Ambos os alunos não chegaram a resolver a tarefa 5, por, como se pode observar nas aulas, terem despendido de muito tempo na resolução da restante ficha.

Analise-se, agora, as resoluções da tarefa realizada durante teste de avaliação.

3. Análise de resultados

O Lucas (versão 2), como se pode observar na figura seguinte, determinou corretamente a expressão algébrica da função composta, evidenciando ter-se apropriado deste conceito.

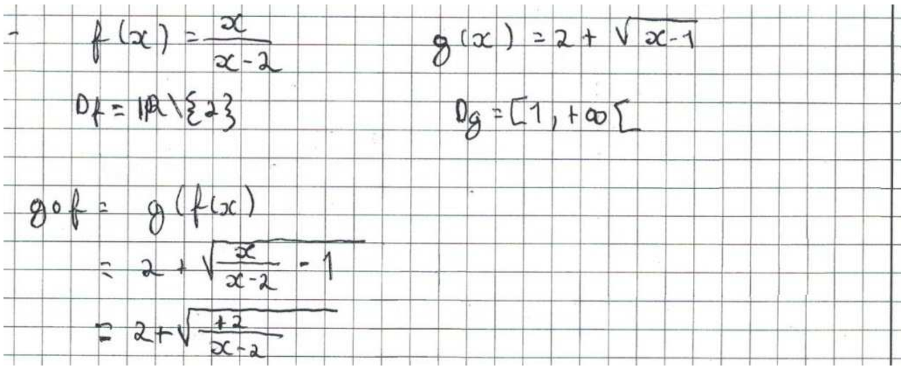


Figura 90 - Resolução do Lucas - grupo j – à questão do teste

Quanto ao domínio da função composta, este aluno determinou-o corretamente, escrevendo a expressão $D_{gof} = \{x\epsilon\mathbb{R}: x\epsilon D_f \wedge f(x)\epsilon D_g\}$ e substituindo-a adequadamente com a expressão algébrica de f, com o domínios $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ e, na vez de colocar $D_g = [1, +\infty[$, substituiu logo com a condição $\frac{x}{x-2} \geq 1$ que deste provinha (ver figura seguinte). Deste modo, o aluno evidenciou ter assimilado como se determina o domínio de uma função composta.

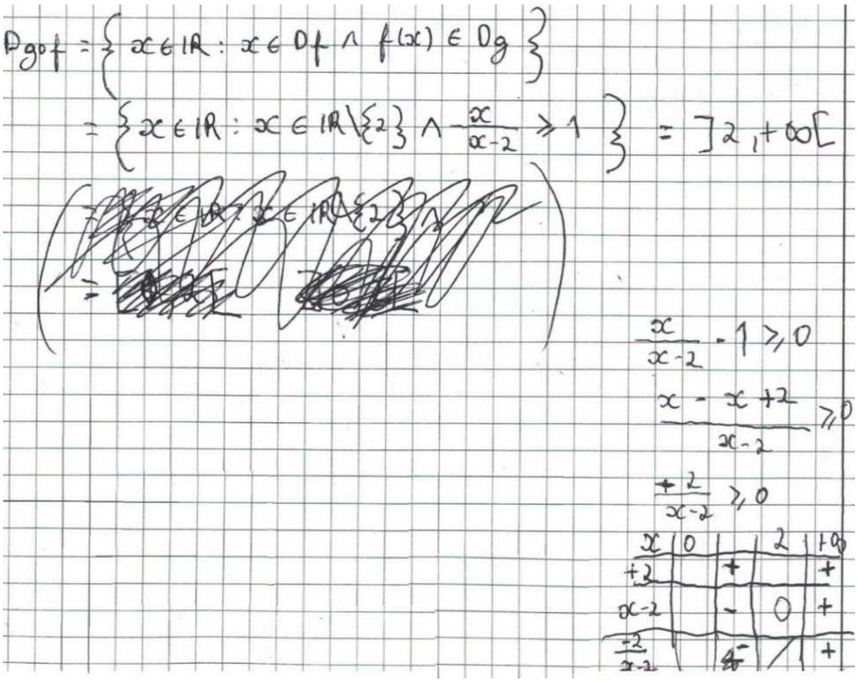


Figura 91 - Resolução do Lucas - grupo j – à questão do teste

3. Análise de resultados

Quanto à resolução da Linda (versão 1), como se pode ver na figura seguinte, a Linda expressou corretamente a expressão algébrica de fog em $f(g(x))$ e, depois, em $\frac{2+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$. Apenas errou no desenvolvimento desta expressão. Assim sendo, a resolução evidencia que a aluna assimilou como se determina a expressão algébrica de uma função composta.

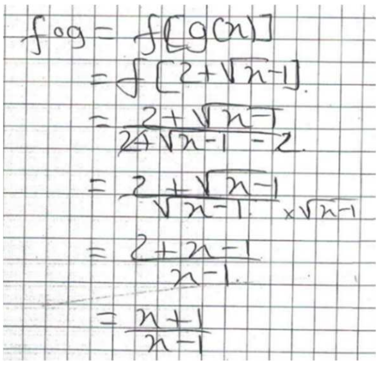


Figura 92 - Resolução da Linda - grupo j – à questão do teste

No que se refere ao domínio da função composta, como se pode ver na figura seguinte, a aluna soube determinar a expressão geral do domínio $D_{fog} = \left\{x\epsilon\mathbb{R}\text{: } x\epsilon D_g \wedge g(x)\epsilon D_f \right\}$, apenas falhou em termos de linguagem simbólica, dado que não escreveu "$x\epsilon\mathbb{R}$:". Também substituiu corretamente neste a expressão algébrica $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ e os domínios $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ e $D_g = [1, +\infty[$. Desenvolveu, ainda, corretamente todas as condições, determinando $D_{fog} = [1, +\infty[\backslash\{1\}$. Este conjunto está correto, porém a aluna, provavelmente por distração, não expressou o intervalo como $D_{fog} =]1, +\infty[$. Assim, a resolução evidencia que a Linda se apropriou do conceito de domínio de uma função composta.

3. Análise de resultados

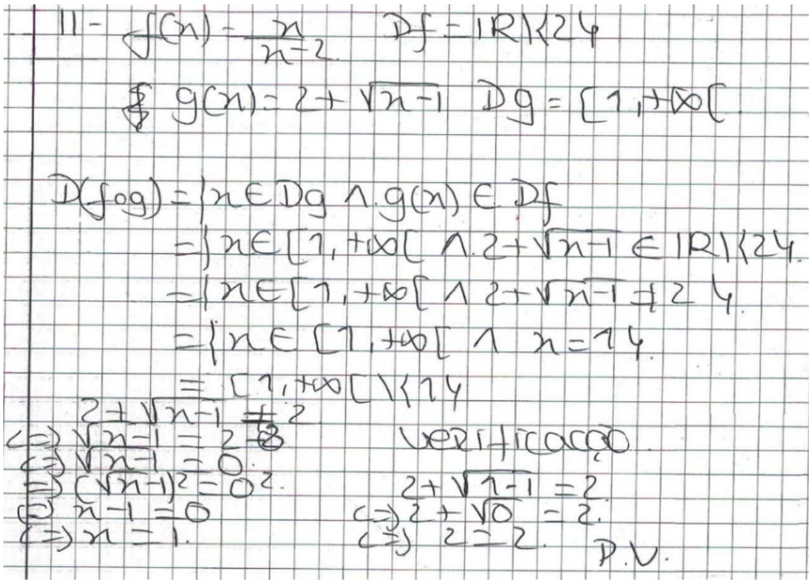


Figura 93 - Resolução da Linda - grupo j – à questão do teste

3.6.2. Motivação

Neste espaço, analisa-se a motivação dos alunos do grupo j ao longo das aulas através dos diários de bordo e dos questionários.

Ao longo de ambas as aulas deste estudo, tanto o Lucas como a Linda envolveram-se na resolução das tarefas propostas, interessando-se e tirando dúvidas quando era necessário. A Linda nas aulas normais de Matemática já apresentava uma atitude semelhante (se bem que melhorada na aula com recurso ao GeoGebra), contudo o Lucas muitas vezes não se interessava enquanto que na aula com recurso ao GeoGebra apresentou melhorias. Portanto, no decurso da primeira aula deste estudo o Lucas evidenciou envolver-se mais nas tarefas propostas.

Agora, analise-se os questionários preenchidos pelo Lucas e pela Linda no final da segunda aula.

O Lucas descreveu a experiência das duas aulas como "uma maneira diferente de aprender uma nova matéria", ainda que tenha sentido que "Tivemos pouco tempo para a ficha toda". Este aluno colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 4 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu, um 4 em como achou interessante. Este aluno achou as aulas motivantes (colocou um nível 2 em como se sentiu desmotivado) e assinalou que se empenhou completamente nas mesmas.

A Linda descreveu de modo similar a experiência das duas aulas afirmando que "Aprendemos de forma diferente", "divertida" e "interessante", porém "Como a matéria é nova ainda não estava pouco consolidada” e “As fichas deviam ser mais pequenas”. Esta aluna colocou, numa escala de 1 a 5 (1 – discordo totalmente; 5 – concordo totalmente), um 3 em como aprendeu, um 3 em como se divertiu, um 3 em como achou interessante. Esta aluna considerou também as aulas motivantes (também colocou um nível 2 em como se sentiu desmotivada).

4. Conclusões

A questão de investigação com que se iniciou este trabalho foi a seguinte:

- Num contexto de sala de aula, uma adequada utilização do GeoGebra aliada ao uso de ferramentas tradicionais contribui para uma mais sólida e motivadora apropriação dos conceitos matemáticos?

Resultante da questão de investigação, os principais objetivos de investigação foram analisar em que medida o GeoGebra, quando explorado complementarmente à utilização de tecnologias de papel e lápis por alunos do 11.º ano de escolaridade:

- contribui para uma mais sólida construção de conhecimentos relativos à composição de funções;
- se constitui um fator de motivação acrescida para a aprendizagem.

Para responder à questão de investigação, foi realizado este estudo que consiste num estudo de caso qualitativo enquadrado num paradigma construtivista. Os cinco casos em estudo foram cinco grupos de alunos, quatro de dois elementos e um de três elementos.

4.1. Em que medida o GeoGebra, quando explorado complementarmente à utilização de tecnologias de papel e lápis contribui para uma mais sólida construção de conhecimentos relativos à composição de funções?

Ambos os alunos do grupo b aprenderam como determinar a expressão algébrica de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções das questões 1.1 e 1.2 do guião de tarefas (primeira aula), das tarefas 1, 2 e 3 da ficha de tarefas (segunda aula) e pela resolução da tarefa do teste. Relativamente ao domínio de uma função composta, como se pode verificar pela resolução de 1.1 do guião e pelo teste, os alunos apropriaram-se deste conceito.

As duas alunas do grupo d também mostraram ter aprendido como determinar a expressão algébrica de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções das questões 1.1, 1.2 e 1.3 do guião de tarefas (primeira aula), das tarefas 1 e 3 da ficha de tarefas (segunda aula) e pela resolução da tarefa do teste. Relativamente ao grupo d, as alunas mostraram que aprenderam como se determina o domínio de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções de cada teste.

O grupo g mostrou ter aprendido como determinar a expressão algébrica de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções das questões 1.1, 1.2 e 1.3 do guião de tarefas (primeira aula), das tarefas 1, 2 e 3 da ficha de tarefas (segunda aula) e pela resolução da tarefa do teste. No que se refere ao domínio de uma função composta, ambas as alunas mostraram ter-se apropriado deste conceito, como se pode verificar pelas resoluções da questão 1.1 do guião, da tarefa 4 da ficha e principalmente dos testes.

No que se refere ao grupo i, os três elementos deste grupo mostraram ter aprendido como determinar a expressão algébrica de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções da questão 1.1 do guião de tarefas (primeira aula), das tarefas 1, 3, 4 e 5 da ficha de tarefas (segunda aula) e pela resolução da tarefa do teste (exceto a Neusa, que não determinou a expressão algébrica da função composta no teste). Quanto ao domínio, as alunas revelaram terem-se apropriado deste conceito, como se pode ver pelas resoluções de 1.1 do guião, da tarefa 4 da ficha e dos testes.

O grupo j mostrou ter aprendido como determinar a expressão algébrica de uma função composta, como se pode verificar pelas resoluções das questões 1.1, 1.2 e 1.3 do guião de tarefas (primeira aula), das tarefas 1 e 3 (no caso da Linda, também se encontra aqui contemplada a tarefa 4) da ficha de tarefas (segunda aula) e pela resolução da tarefa do teste. Os dois alunos deste grupo aprenderam como determinar o domínio de uma função composta, como se pode verificar pela tarefa 4 da ficha e pelos testes.

No caso do guião de tarefas da primeira aula recorde-se que este guião foi realizado antes da formalização em sala de aula dos conceitos associados à composição de funções (expressão algébrica e domínio). Como foi mencionado anteriormente, a maioria dos casos conseguiu mobilizar os seus conhecimentos prévios com o recurso ao GeoGebra para determinar tanto a expressão algébrica como o domínio de uma função composta. Assim sendo, o GeoGebra parece ter contribuído para uma mais sólida construção de conhecimentos relativos à composição de funções.

4.2. Em que medida o GeoGebra, quando explorado complementarmente à utilização de tecnologias de papel e lápis constitui um fator de motivação acrescida para a aprendizagem?

Ambos os elementos do grupo b eram originalmente intrinsecamente motivados. Pelo diário de bordo da primeira aula, tanto Ronaldo como o Rogério "pareciam bastante envolvidos nas tarefas, partilhando e discutindo ideias entre si" (Apêndice XIV).

Nos questionários preenchidos, tanto o Ronaldo como o Rogério concordaram que esta abordagem didática foi motivadora.

Quanto ao grupo d, que era constituído por duas alunas extrinsecamente motivadas, pelo diário de bordo da primeira aula, estas empenharam-se bastante tanto nas produções digitais do GeoGebra como no preenchimento do guião de tarefas.

Nos questionários preenchidos, tanto a Cassandra e Carla concordaram que esta abordagem didática foi motivadora.

O grupo g, que era constituído por uma aluna intrinsecamente motivada (Beatriz) e uma aluna extrinsecamente motivada (Bianca), pelo diário de bordo da primeira aula, também se empenhou em resolver o guião, as duas alunas "trabalharam calmamente partilhando ideias entre si" e "pareciam motivadas pelo desafio diferente que foi toda esta aula" (Apêndice XIV).

Nos questionários preenchidos, Beatriz considerou esta abordagem didática motivadora. Enquanto que a Bianca a classificou como 3 sentir-se desmotivada numa escala de 1-5.

Relativamente ao grupo i, grupo este que tinha dois elementos extrinsecamente motivados (Neusa e Natália) e um não motivado (Nilce), pelo diário de bordo da primeira aula, o grupo "[pareceu] envolver-se muito mais nas tarefas desta aula do que nas tarefas das outras aulas de Matemática" (Apêndice XIV). Logo, a Nilce (aluna não motivado) interessou-se mais que o normal durante a primeira aula

Nos questionários preenchidos, as três alunas classificaram em 3 (numa escala de 1-5) a afirmação "Esta estratégia foi desmotivante".

O grupo j, que era constituído por um aluno não motivado (Lucas) e uma aluna extrinsecamente motivada (Linda), pelo diário de bordo da primeira aula, envolveu-se na resolução das tarefas do guião e "Nesta aula o Lucas também para ajudar a sua colega nas produções do GeoGebra, empenhou-se na sua resolução" (Apêndice XIV). Logo, o Lucas (aluno não motivado) interessou-se mais que o normal durante a primeira aula.

Nos questionários preenchidos, tanto o Lucas como a Linda concordaram que esta abordagem didática foi motivadora.

Pelo diário de borda da primeira aula, verifica-se que todos os casos se interessaram ou se interessaram mais do que nas outras aulas de Matemática. Inclusivamente os dois alunos desmotivados (Nilce e Lucas).

Pelos questionários verifica-se que a maioria dos casos consideraram a abordagem didática motivadora, inclusivamente o Lucas que era um dos dois alunos desmotivados da turma. A outra aluna não motivada – a Nilce do grupo i – não classificou a abordagem didática como motivadora ou desmotivadora.

Assim sendo, na maioria dos casos o GeoGebra revelou-se um fator de motivação acrescido para a aprendizagem da composição de funções.

4.3. Reflexão final – Prática Pedagógica Supervisionada

Numa sociedade em mudança como a que nos encontramos inseridos, há inevitavelmente uma escola em mudança permanente que exige do professor uma posição de agente ativo no estabelecimento onde ensina e uma disposição a colaborar com os respetivos colegas, sendo que para tal tem de ter uma visão dele mesmo como um profissional em constante desenvolvimento (Herdeiro & Silva, 2008; Saraiva & Ponte, 2003).

Ao complexo processo de crescimento do professor na sua competência em termos de práticas no controlo da sua atividade em e fora de sala de aula, processo este que incorpora todas as experiências de aprendizagem do professor com consequências benéficas, direta ou indiretamente, e que contribuem para a melhoria da qualidade do seu desempenho enquanto docente, denomina-se desenvolvimento profissional do professor (Herdeiro & Silva, 2008; Saraiva & Ponte, 2003).

Segundo Saraiva e Ponte (2003), para que ocorra desenvolvimento profissional tem de ocorrer aprendizagem por parte do professor sendo que para tal o professor tem de adquirir a capacidade de ver, ouvir e fazer coisas que não fazia antes. Ou seja, implica que haja mudança para que esta mudança se concretize, em primeiro lugar, o próprio professor tem de a desejar.

4. Conclusões

Day (1999), mencionado pelos autores anteriores, explicita que tal mudança não pode ser forçada, uma vez que é o próprio professor quem desenvolve e não quem é desenvolvido, pelo que uma mudança não interiorizada é meramente temporária envolvendo alterações de valores, atitudes, emoções e perceções que orientam a prática. Todo o Estágio ajudou a Professora Investigadora a colocar-se numa posição já de aprendizagem permanente enquanto professora.

Esta perspetiva - de que o desenvolvimento profissional é e tem de ser uma constante na vida profissional - tornou-se a aprendizagem mais marcante neste Estágio. Cada professor tem o dever de tentar sair da sua zona de conforto e experimentar o que lhe é desconhecido. Destaco, ainda, as potencialidades do trabalho em grupo com os restantes membros da comunidade escolar, que no Estágio se tornaram evidentes, enquanto que antes transmitiam uma ideia um pouco mais utópica não verdadeiramente concretizável na maioria das situações.

No que diz respeito ao estudo empírico realizado no âmbito deste Relatório, em primeiro lugar, toda a revisão de literatura efetuada para a concretização deste estudo tornou-se fonte de conhecimento para a prática. No caso do primeiro subcapítulo do Enquadramento Teórico, pode-se constatar o quão um conceito como o da função, que é imprescindível para a Matemática como a conhecemos, não foi outrora imediatamente óbvio para grandes matemáticos. Iniciar uma aula do 7.ºano de escolaridade na qual se irá abordar pela primeira vez o conceito de função tornar-se-á mais interessante se for iniciada com uma breve síntese da evolução do conceito. Também neste subcapítulo, a análise das dificuldades que os alunos mais evidenciam quando estão a resolver uma simples tarefa, relacionada com este tópico, permitiu evidenciar que tais dificuldades podem residir em inapropriadas conceções que o aluno tem de função, que poderão ter um paralelo com a evolução do conceito dentro da comunidade matemática e para as quais esta análise terá tornado a Professora Investigadora mais alerta. No subcapítulo da motivação, após a leitura e aprendizagem sobre a teoria da autodeterminação, é inevitável que o próprio professor reveja as suas experiências passadas e depois de voltar à sala de aula, se coloque numa atitude mais analítica sobre o comportamento e sobre as próprias tarefas a propor. De facto, o desenvolvimento de competências não surgirá nem a partir de um enunciado nem demasiadamente complicado nem demasiadamente fácil. Também será preferível considerar resoluções de tarefas em grupo, pois poderão apelar à necessidade de *relatedness*. Por outro lado, para alunos cujas competências podem ser potenciadas com um conjunto de medidas adequadas como é o uso de GeoGebra enquanto suporte didático.

De um modo geral, no decorrer das aulas nas quais se desenvolveu este estudo (e na preparação das mesmas que permitiu constatar mais veementemente a versatilidade do GeoGebra na disciplina de Matemática não só para o tópico das Funções) destacou-se a possibilidade de os alunos contactarem com o GeoGebra como forma de aprendizagem e também como fator motivador à própria. Sendo que o senão será sempre prever, para a turma em questão, quais os problemas que poderão surgir.

4.4. Limitações do estudo

A maior limitação deste estudo foi a inexperiência. Muitas das tarefas e decisões a tomar, aquando de uma investigação tornam-se mais árduas com a falta de experiência. Quando um investigador tem experiência, é capaz de melhor definir e gerir o que pretende verdadeiramente analisar e consegue, deste modo, traçar um rumo muito mais claro, prevendo as dificuldades e fazendo as melhores escolhas, seja a nível mais geral como a um nível mais particular tal como recolher os dados mais adequados ao contexto e às questões de investigação.

Uma outra limitação foi o número reduzido de aulas disponível para a implementação desta abordagem didática, devido ao reduzido número de aulas previstas para o tópico das Funções (dada a complexidade deste tópico).

4.5. Sugestões para futuras investigações

Dada à dimensão deste estudo ser tão diminuta e a pertinência das tecnologias digitais como o GeoGebra, uma sugestão para o futuro seria aumentar a dimensão deste estudo.

Uma outra seria investigar em mais detalhe no tópico das Funções o uso do GeoGebra complementarmente com o uso das ferramentas tradicionais papel e lápis.

Referências bibliográficas

Referências bibliográficas

Abuhamdeh, S., & Csikszentmihalyi, M. (2012). Attentional involvement and intrinsic motivation. *Motiv Emot*, *36*(3), 257–267.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação.

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Retrieved from https://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/2028

Arbain, N., & Shukor, N. (2015). The effects of GeoGebra on students achievement. *Procedia -Social and Behavioral Sciences*, *172*, 208–214. doi:10.1016/j.sbspro.2015.01.356

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2017). Students' conceptualisations of function revealed through definitions and examples. *Research in Mathematics Education*, *19*(1), 1–19. doi:10.1080/14794802.2016.1249397

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal of Research in Mathematics Education*, *19*(3), 246–259. doi:http://dx.doi.org/10.2307/749068

Azevedo, A., & Ponte, J. P. (2006). Raciocínio Matemático na aprendizagem das Funções: um estudo de caso. Artigo apresentado no Seminário de encerramento do Projeto IMLNA, Lisboa. *Projecto IMLA*.

Bakar, K., Ayub, A., & Mahmud, R. (2015). Effects of GeoGebra towards students' mathematics performance. In Z. A. Majid, N. R. Salim, M. F. Laham, K. Gopal, P. P. See, & Z. Mahad (Eds.), *7th International Conference On Research And Education In Mathematics (ICREM7)* (pp. 180–183). doi:10.1109/ICREM.2015.7357049

Basibuyuk, K., Sahin, O., Gokkurt, B., Erdem, E., & Soylu, Y. (2016). The mistakes that are made by students with regard to functions: evidence from Erzincan (a province in Turkey). *Universal Journal of Educational Research*, *4*(11), 2523–2532.

Bauer, A. (2013). Reasoning with multiple and dynamic representations. In E. Faggiano & A. Montone (Eds.), *11th Internacional Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 327–329). Retrieved from http://dm.uniba.it/ictmt11/download/ICTMT11_Proceedings.pdf

Bell, J. (2010). *Como realizar um projeto de investigação: um guia para a pesquisa em Ciências Sociais e da Educação* (5.ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Best, M., & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(6), 865–880. doi:10.1007/s11858-017-0880-6

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: fundamentos, métodos e técnicas*. Porto: Porto Editora.

Borba, M., & Penteado, M. (2016). *Informática e Educação Matemática* (5ª ed.). Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Brown, J. (2007). Early Notions of Functions in a Technology-Rich Teaching and Learning Environment (TRTLE). In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice — Volume 1* (pp. 153–162). Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED503746.pdf#page=129

Caridade, C. (2012). Tecnologias de informação e comunicação para o enriquecimento no ensino/aprendizagem. In J. F. Matos, N. Pedro, A. Pedro, P. Patrocínio, J. Piedade, & S. Lemos (Eds.), *II Congresso Internacional TIC e Educação - ticEDUCA2012* (pp. 945–960). Retrieved from http://ticeduca.ie.ul.pt/atas/pdf/atas.pdf

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 114–162).

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias - ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais." *Quadrante – Revista de Investigação Em Educação Matemática*, *XVIII*(1 e 2), 53–85.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., Devries, D., John, D., … Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. doi:10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Coelho, A., & Cabrita, I. (2015). A creative approach to isometries integrating GeoGebra and Italc with "paper and pencil" environments. *Journal of the European Teacher Education Network (JETEN)*, *10*, 71–85.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.

Deci, E., & Ryan, R. (2000). The "what" and "why" of goal pursuits: human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry*, *11*(4), 227–268.

Deci, E., Vallerand, R., Pelletier, L., & Ryan, R. (1991). Motivation and Education: The Self-Determination Perspective. *Educational Psychologist*, *26*(3&4), 325–346.

Dede, Y. (2006). Mathematics educational values of college students' towards function concept. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2*(1), 82–102. doi:https://doi.org/10.12973/ejmste/75440

Doorman, L., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2013). Design research in mathematics education: the case of an ICT-rich learning arrangement for the concept of function. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research - Part B: Illustrative cases* (pp. 425–446).

Referências bibliográficas

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education*. Hamburg: SpringerOpen. Retrieved from https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-33666-4.pdf

Duarte, J. (2008). Álgebra, pensamento algébrico e tecnologias: trabalhar com equações e funções como domínios relacionados. *Revista APM - Educação E Matemática,* N.º 98, 40–42.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(3), 533–556. doi:10.1007/s10763-006-9054-7

Faggiano, E., Montone, A., & Pertichino, M. (2015). About the awkward process of integrating technology into math class. In N. Amado & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching-ICTMT12* (pp. 285–292).

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. Ideas discussed at PME over the last 30 years. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 237–273). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Freire, M., & Lagarto, J. (2012). Aprender sem papel: criação e implementação de uma disciplina digital. In J. F. Matos, N. Pedro, A. Pedro, P. Patrocínio, J. Piedade, & S. Lemos (Eds.), *II Congresso Internacional TIC e educação - ticEDUCA2012* (pp. 263–278). Retrieved from http://ticeduca.ie.ul.pt/atas/pdf/atas.pdf

Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação. (2013a). *Relatório das Provas Finais de Ciclo e Exames Finais Nacionais - 2012*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação. (2013b). *Análise preliminar dos resultados das Provas Finais de Ciclo e Exames Finais Nacionais - 2013*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Retrieved from http://iave.pt/np4/file/112/PrelimReport_Exams_2013_PDFCon.pdf

Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação. (2014). *Processo de Avaliação Externa da Aprendizagem – Provas Finais de Ciclo e Exames Nacionais 2014*.

Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação. (2015). *Processo de Avaliação Externa da Aprendizagem – Provas Finais de Ciclo e Exames Nacionais 2015*.

Referências bibliográficas

Gabinete de Avaliação Educacional - Ministério da Educação. (2017a). *Processo de Avaliação Externa da Aprendizagem – Provas de Aferição, Provas Finais e Exames Nacionais 2016*.

Gabinete de Avaliação Educacional - Governo de Portugal. (2017b). *Exames Finais Nacionais - Ensino Secundário, Relatório Nacional: 2010-2016*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Gaspar, J., & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais - Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.), *Atas XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169–190). Braga: Associação de Professores de Matemática.

Gursul, F., & Keser, H. (2009). The effects of online and face to face problem based learning environments in mathematics education on student's academic achievement. In H. Uzunboylu & N. Cavus (Eds.), *World Conference on Educational Sciences 2009* (pp. 2817–2824). doi:10.1016/j.sbspro.2009.01.501

Herdeiro, R., & Silva, A. (2008). Práticas reflexivas: uma estratégia de desenvolvimento profissional dos docentes. In E. Shiroma & P. Torriglia (Eds.), *Anais (Atas) do IV Colóquio Luso-Brasileiro, VIII Colóquio sobre Questões Curriculares: Currículo, Teorias, Métodos*. Brasil: Universidade de Santa Catarina.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123–134.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2010). Gaining momentum: GeoGebra inspires educators and students around the world. *GeoGebra The New Language for the Third Millennium*, *1*(1), 1–6.

Holanda, A. (2006). Questões sobre a pesquisa qualitativa e pesquisa fenomenológica. *Análise Psicológica*, *XXIV*(3), 363–372.

Kjeldsen, T., & Lutzen, J. (2015). Interactions between Mathematics and Physics: the history of the concept of Function - teaching with and about nature of Mathematics. *Science & Education*, *24*(5-6), 543–559.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: a brief survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282–300.

Kleiner, I. (1993). Functions: historical and pedagogical aspects. *Science & Education*, *2*(2), 183–209.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Lourenço, A., & Paiva, M. (2010). A motivação escolar e o processo de aprendizagem. *Ciências & Cognição*, *15*(2), 132–141.

Referências bibliográficas

Lucus, C. (2006). Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 4* (pp. 97–104).

Makonye, J. P. (2014). Teaching Functions Using a Realistic Mathematics Education Approach : A Theoretical Perspective. *International Journal Education Science*, *7*(3), 653–662. doi:10.1080/09751122.2014.11890228

Meel, D. (1999). Prospective teachers' understandings: function and composite function. *Issues in the Undegraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, *1*, 1–12.

Melo, F., Amorim, J., & Barros, B. (2012). Abordagens educacionais e desenvolvimento de recursos educativos digitais para o Ensino de Matemática. In J. F. Matos, N. Pedro, A. Pedro, P. Patrocínio, J. Piedade, & S. Lemos (Eds.), *II Congresso Internacional TIC e Educação - ticEDUCA2012* (pp. 216–236).

Middleton, J., & Spanias, R. (1999). Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalization, and Criticism of the Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(1), 65–88.

Ministério da Educação - Governo de Portugal. (2001). *Programa de Matemática A - 10.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação - Governo de Portugal. (2002). *Programa de Matemática A - 11.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação - Governo de Portugal. (2013a). *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/matematica-0

Ministério da Educação - Governo de Portugal. (2013b). *Programa e Metas Curriculares - Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/matematica

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol 2* (pp. 884–887). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Mourão, A. (2002). A Teoria da Reificação de Anna Sfard: o caso das funções. In *Anais do XI Encontros de Investigação em Educação Matemática* (pp. 275–289).

Niemiec, C., & Ryan, R. (2009). Autonomy, competence, and relatedness in the classroom Applying self-determination theory to educational practice. *Theory and Research in Education*, *7*(2), 133–144.

Referências bibliográficas

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2015). Students' Competencies in Working With Functions in Secondary Mathematics Education—Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(3), 657–682. doi:10.1007/s10763-013-9496-7

Oehrtman, M., & Thompson, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. *Mathematical Association of America*. Retrieved from http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function

OECD. (2015). Students, computers and learning: making the connection. In *Integrating information and communication technology in teaching and learning* (pp. 49–79). PISA. Retrieved from http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/students-computers-and-learning_9789264239555-en

Oliveira, G. (2017). GeoGebra and numerical representation: a proposal involving fundamental theorem of arithmetic. In G. Aldon & J. Trgalova (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 248–255).

O'Shea, A., Breen, S., & Jaworski, B. (2016). The Development of a Function Concept Inventory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(3), 279–296. doi:10.1007/s40753-016-0030-5

Pakdel, B. (2013). The Historical Context of Motivation and Analysis Theories Individual Motivation. *International Journal of Humanities and Social Science*, *3*(18), 240–247.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., & Philippou, A. (2015). Teaching the concept of function: definition and problem solving. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 439–445).

Pereira, M. (2008). Tecnologias informáticas e aprendizagem da Matemática.

Pereira, P. (2013). *(In)Sucesso escolar na disciplina de Matemática A: da prescrição curricular à sala de aula*. Universidade do Minho.

Ponte, J. P. da. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação E Matemática*, *15*, 3–9.

Ponte, J. P. da. (2002). Investigar a nossa própria prática. In Grupo de trabalho de Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. da. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132.

Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções*. (M. da Educação, Ed.) (2ª edição.).

Referências bibliográficas

Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the case of GeoGebra*.

Reynolds, A., & Walberg, H. (1992). A structural model of science achievement and attitude: an extension to high school. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 371–382.

Rodrigues, C. (1986). Comportamento motivado: do impacto. In *Motivação e aprendizagem* (pp. 48–64).

Ryan, R., & Deci, E. (2000). Intrinsic and extrinsic motivation: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, *25*, 54–67.

Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). Estudo das funções no Programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração.

Saraiva, M., & Teixeira, A. (2009). Secondary school students' understanding of the concept of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni Di Ricerca in Didattica (Matematica)*, *4*(19), 74–83.

Saraiva, M., & Ponte, J. P. da. (2003). O trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional do Professor de Matemática. *Quadrante*, *12*(2), 25–52.

Savenye, W., & Robinson, R. (2004). Qualitative research issues and methods: An introduction for educational technologists. In *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1045–1071). Lawrence Erlbaum Associates.

Schiefele, U., & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics education1*, *26*(2), 163–181.

Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(3), 307–322. doi:10.1007/s11858-017-0864-6

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *Mathematical Association of America - Notes and Reports Series*, 25–58.

Silva, J., Oliveira, K., Silva, K., Barbosa, M., Lima, M., Eloy, R., & Camelo, S. (2012). O uso do GeoGebra no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e Funções. In *1ª. Conferência Latino Americana do GeoGebra* (pp. CLXXX–CXCII).

Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 149–170.

Silver, E. (2002). Educational research and education policy: be careful what you wish for! *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 74–77.

Referências bibliográficas

Singh, K., Granville, M., & Dika, S. (2002). Mathematics and Science Achievement: Effects of Motivation, Interest, and Academic Engagement. *The Journal of Educational Research*, *95*(6), 323–332.

Tavares, J., Pereira, A., Gomes, A., Monteiro, S., & Gomes, A. (2007). Desenvolvimento e aprendizagem. In *Manual de psicologia do desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 107–126).

Tomas, H. (1971). The concept of function. In *Annual meeting of the American Educacional Research Association*.

Tzavara, A., Komis, V., & Karsenti, T. (2018). A methodological framework for investigating TPACK integration in educational activities using ICT by prospective early childhood teachers. *Journal of Education Technology*, *26*(1), 71–89. doi:http://dx.doi.org/10.17471/2499-4324/976

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education1*, *20*(4), pp. 356–366.

Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding linear function: a comparison of selected textbooks from England and Shanguai. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 131–153. doi:10.1063/1.2756072

Weigand, H.-G. (2017). Competences and digital technologies - reflections on a complex relashionship. In G. Aldon & J. Trgalova (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 40–47).

Wæge, K. (2009). Motivation for learning mathematics in terms of needs and goals. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 84–93).

Yin, R. K. (2015). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (5ª ed.). Porto Alegre, Brasil: Bookman: Bookman.

Apêndices

Apêndice I: plano da primeira aula

Ano letivo: 2015/2016 — 4 março de 2016

Ano: 11.º

Disciplina: Matemática — Duração: 90 minutos

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Funções racionais e com radicais.

Taxa de Variação e Derivada

Tópicos:

Composição de funções no contexto do estudo de funções, envolvendo polinómios do 3.º grau, a função trigonométrica cosseno, a função $g(x) = \sqrt{x}$ e a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Objetivos do foro do conhecimento:

- Aperfeiçoar o cálculo em $\mathbb{R}$ e operar com expressões racionais, com radicais e trigonométricas;
- Resolver problemas recorrendo a funções e suas representações gráficas.

Objetivos do foro das atitudes:

- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova;
- Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades;
- Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças.

Objetivos do foro das capacidades:

- Interpretar e criticar resultados;
- Descobrir relações entre conceitos de Matemática;
- Formular generalizações a partir de experiências;
- Desenvolver a visualização no plano através do GeoGebra;
- Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.

Apêndices

Conteúdos:

- Função resultante da composição de duas funções, respetiva expressão algébrica e domínio;
- A composição de funções não é uma operação comutativa.

Conhecimentos prévios:

Função, gráfico e representação gráfica;

Domínio e contradomínio de uma função.

Recursos/Instrumentos auxiliares:

- Vários computadores providos do *software* GeoGebra e projetor;
- Guião de tarefas;
- Caneta.

Estrutura geral (por ordem cronológica):

i. Redação do sumário

ii. Preparação para a realização de tarefas
tempo previsto: 10 minutos

iii. Realização de tarefas
tempo previsto: 60 minutos

iv. Recolha de documentos
tempo previsto: 5 minutos

v. Síntese de ideias principais
tempo previsto: 15 minutos

vi. Trabalho de casa
tempo previsto: 15 minutos

i. <u>Redação do sumário:</u>

Sumário:

- Composição de funções com recurso ao GeoGebra;
- Resolução de tarefas.

ii. <u>Preparação para a realização de tarefas:</u>

tempo previsto: 10 minutos

Neste momento da aula, pretendo esclarecer os alunos como esta aula deve decorrer, explicando-lhes que irão trabalhar a pares com recurso ao computador. A escolha de pares é realizada ao critério dos alunos. Também explicarei que irão preencher um guião, sendo que este será entregue individualmente, e que devem abrir o GeoGebra no início da aula e começar de imediato a guardar os documentos, que posteriormente serão recolhidos.

Também pretendo no início desta aula, após todos os grupos terem o *software* aberto em cada computador, explicitar como se introduz um 'seletor'. Ilustrarei este processo com o meu computador pessoal e por recurso a projeção.

iii. <u>Realização de tarefas:</u>

tempo previsto: 60 minutos

O guião entregue aos alunos contém tarefas de natureza exploratória. Este guião foi desenhado com o intuito de servir de base a uma exploração mais formal deste tópico.

Os pontos que são explorados especificamente no guião são o domínio da função resultante da composição de duas funções, a sua expressão algébrica e o facto de a operação de composição de duas funções não ser comutativa.

Tarefa	Ponto	Alínea	Objetivos
1	1.1	a)	Observar o comportamento da função composta $(f o g)$ através da manipulação da variável 'a' de um seletor criado no GeoGebra e descrever o que se verifica, em particular para o caso em que 'a' é negativo.
		b)	Determinar imagens de 'a' por f, por g e pela composta $(f o g)$ e registar os valores numa tabela.
		c)	Determinar a expressão algébrica da função composta.
		d)	Identificar o domínio da função composta.
	1.2	a)	Observar o comportamento da função composta $(g o f)$ através da manipulação da variável 'a' e descrever o que se verifica, em particular quando 'a' varia num intervalo indicado. Determinar outros intervalos em relação aos quais se verifique idêntico comportamento.
		b)	Determinar imagens de 'a' por g, por f e pela composta $(g o f)$e registar os valores numa tabela.
		c)	Determinar a expressão algébrica da função composta.
		d)	Identificar o domínio da função composta.

	1.3	Observar e concluir que a composição de funções não é uma operação comutativa.

Tarefa	Ponto	Alínea	Objetivos
2	2.1	a)	Observar o comportamento da função composta (hol) através da manipulação variável ‘a’ de um seletor criado no GeoGebra e descrever o que se verifica, em particular para o caso em que ‘a’ é zero.
		b)	Determinar imagens de ‘a’ por h, por l e pela composta (hol)e registar os valores numa tabela
		c)	Determinar a expressão algébrica da função composta.
		d)	Identificar o domínio da função composta.
	2.2	a)	Observar o comportamento da função composta (loh) através da manipulação variável ‘a’ de um seletor criado no GeoGebra e descrever o que se verifica, em particular para o caso em que ‘a’ é zero.
		b)	Determinar imagens de ‘a’ por l, por h e pela composta (loh) e registar os valores numa tabela.
		c)	Determinar a expressão algébrica da função composta.
		d)	Identificar o domínio da função composta.
	2.3	Observar e concluir que a composição de funções pode ser uma operação comutativa.	

Caso eu observe que vários grupos repetem o mesmo erro ou têm a mesma dificuldade que não os permite avançar (por exemplo, relacionada com as entradas das expressões das funções no GeoGebra e com a criação de novos pontos, como no caso em que é necessário introduzir um ponto cuja ordenada corresponde à imagem por f da imagem de a por g), pretendo ter um computador pessoal ligado a um projetor, de modo a esclarecer dúvidas que possam surgir. Contudo, como todas as tarefas são de cariz exploratório, pretendo dar espaço ao aluno para pensar e tentar resolver as dúvidas do próprio grupo.

iv. Recolha de documentos:

tempo previsto: 5 minutos

Momento de recolha dos documentos digitais para uma *pen* digital e recolha de cada guião.

v. Síntese de ideias principais:

tempo previsto: 15 minutos

Neste momento, decorrerá uma discussão e síntese das ideias principais com a turma.

vi. Trabalho de casa:

Neste momento, informo os alunos que terão como trabalho de casa a realização da tarefa 7, que se encontra na página 109 do manual. Informando, ainda, que terão de realizá-la numa folha à parte para que possa ser recolhida na aula seguinte. Esta tarefa foi escolhida para que os alunos possam ter contacto com problemas do quotidiano, cuja resolução pode envolver a composição de funções.

Apêndice II: guião de tarefas no GeoGebra da primeira aula

Matemática A

4 de março de 2016

11.º C

Nome: ____ nº _____

Vais agora realizar um conjunto de tarefas no GeoGebra. Este guião é preenchido individualmente, mas a resolução é feita a pares. Tem atenção que para além de teres de entregar esta ficha resolvida, terás de entregar os documentos que criaste no GeoGebra. Não te esqueças de ir gravando o documento ao longo do trabalho.

Para cada tarefa, grava o documento no GeoGebra sob o nome 'tarefa_número da tarefa_nome de um dos alunos_nome do outro aluno'. Por exemplo, 'tarefa_1_Joana_Andre'.

Tarefa 1:

Abre o GeoGebra. Segue as seguintes instruções:

1. Insere um seletor. Escolhe como valor mínimo -10 e valor máximo 10. Denomina por ***a*** a variável do Seletor.
2. Representa graficamente as funções
$$f(x) = \cos(x) \text{ e } g(x) = \sqrt{x}.$$
Atenção: para colocar a raíz quadrada na 'Entrada' do GeoGebra usa o comando 'sqrt'.
3. Cria um ponto de abcissa igual a ***a*** e cuja ordenada é a respetiva imagem por f. Denomina-o por A.
Atenção: para criares um ponto A de abcissa x e ordenada y deves introduzir no campo 'Entrada' A=(x,y).
4. Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a respetiva imagem por g. Denomina-o por B.

1.1

a) Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a imagem por f da respetiva imagem de ***a*** por g. Denomina-o por ***T***.
Move ***a***. O que podes observar em relação ao ponto ***T***?

Ao moveres ***a*** o que podes concluir em relação ao ponto ***T*** para valores negativos de ***a***?

b) Move ***a***. Preenche a seguinte tabela para os valores indicados e escolhe outro(s) valor(es) de a:

a	***f(a)***	***w=g(a)***	***Ordenada de T f(w)***
1			
-1			
2			

---------			
x			

c) Os pontos obtidos pelo processo indicado na alínea a) definem uma nova função. Indica a expressão algébrica da nova função.

d) O que podes concluir quanto ao domínio desta função?

1.2

a) Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a imagem por g da respetiva imagem de ***a*** por f. Denomina-o por ***R***.
Move ***a***. O que podes observar em relação ao ponto ***R***?

Ao moveres ***a*** no intervalo [2,4], o que podes observar em relação ao ponto ***R***? Em que outros intervalos se verifica o mesmo comportamento?

b) Move ***a***. Preenche a seguinte tabela para os valores indicados e escolhe outro(s) valor(es) de ***a***:

a	***w=f(a)***	***g(a)***	***Ordenada de R g(w)***
1			
2			
5			

---------			
x			

c) Os pontos obtidos pelo processo indicado na alínea a) definem uma nova função. Indica a expressão algébrica da nova função.

d) O que podes concluir quanto ao domínio desta função?

1.3

Representa graficamente no GeoGebra a função cuja expressão determinaste na alínea c) em **1.1**.

Representa graficamente no GeoGebra a função cuja expressão determinaste na alínea c) em **1.2**.

Compara as duas representações que obtiveste, o que podes concluir? São semelhantes?

Grava o programa e segue para a próxima tarefa.

Tarefa 2:

Abre o GeoGebra. Segue as seguintes instruções:

1. Insere um seletor. Escolhe como valor mínimo -10 e valor máximo 10. Denomina ***a*** a variável do Seletor.
2. Representa graficamente as funções
$$h(x) = x^3 \text{ e } l(x) = \frac{1}{x}.$$
3. Cria um ponto de abcissa igual a ***a*** e cuja ordenada é a respetiva imagem por l. Denomina-o por A.
4. Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a respetiva imagem por h. Denomina-o por B.

2.1

a) Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a imagem por h da respetiva imagem por l de ***a***. Denomina-o por ***T***.
Move ***a***. O que podes observar em relação ao ponto ***T***?

Ao moveres ***a***, o que podes observar em relação ao ponto ***T*** para ***a*** igual a zero?

b) Move ***a***. Preenche a seguinte tabela para os valores indicados e escolhe outro(s) valor(es) de ***a***:

a	***h(a)***	***w=l(a)***	***Ordenada de T h(w)***
1			
-2			
0			

---------			
x			

c) Os pontos obtidos pelo processo indicado na alínea a) definem uma nova função. Indica a expressão algébrica da nova função.

d) O que podes concluir quanto ao domínio desta função?

2.2

a) Cria um ponto de abcissa ***a*** e cuja ordenada é a imagem por l da respetiva imagem de ***a*** por h. Denomina-o por ***R***.
Move ***a***. O que podes observar em relação ao ponto ***R***?

Ao moveres ***a,*** o que podes observar em relação ao ponto ***R*** para ***a*** igual a zero?

b) Move ***a***. Preenche a seguinte tabela para os valores indicados e escolhe outro(s) valor(es) de ***a***:

a	***l(a)***	***h(a)***	***Ordenada de R l(w)***
1			
-2			
0			

---------			
x			

c) Os pontos obtidos pelo processo indicado na alínea a) definem uma nova função. Indica a expressão algébrica da nova função.

d) O que podes concluir quanto ao domínio desta função?

2.3

a) Representa graficamente no GeoGebra a função cuja expressão determinaste na alínea c) em **1.1**.
Representa graficamente no GeoGebra a função cuja expressão determinaste na alínea c) em **1.2**.

Compara as duas representações que obtiveste, o que podes concluir? São semelhantes?

Grava o programa e chama o professor para que possam ser escolhidos os documentos que criaste no GeoGebra.

Apêndice III: plano da segunda aula

Ano letivo: 2015/2016 | 8 de março de 2016

Ano: 11.º

Disciplina: Matemática | Duração: 90 minutos

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Funções racionais e com radicais.

Taxa de Variação e Derivada

Tópicos:

Composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2.º e 3.º grau.

Objetivos do foro do conhecimento:

- Aperfeiçoar o cálculo em $\mathbb{R}$ e operar com expressões racionais, com radicais e trigonométricas;
- Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva e analítica.

Objetivos do foro das atitudes:

- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.

Objetivos do foro das capacidades:

- Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;
- Descobrir relações entre conceitos de Matemática;
- Formular generalizações a partir das experiências;
- Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.

Conteúdos:

- Identificar, dadas funções $f: D_f \to A$ e $g: D_g \to B$, a «função composta de g com f» como a função $gof: D_{gof} \to B$, tal que $D_{gof} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$ e $\forall_{x \in D_{gof}}, gof(x) = g(f(x))$ e designá-la também por « g composta com f», « g após f» ou « f seguida de g».

Apêndices

Conhecimentos prévios:

Função, gráfico e representação gráfica;

Funções trigonométricas e círculo trigonométrico;

Domínio e contradomínio de uma função.

Recursos/Instrumentos auxiliares:

- Ficha de tarefas;
- Folha e caneta.

Estrutura geral (por ordem cronológica):

i. Redação do sumário

ii. Recolha do trabalho de casa

iii. Formalização dos conhecimentos presentes no guião da aula anterior
tempo previsto: 20 minutos

iv. Formalização do conceito de composição de funções
tempo previsto: 10 minutos

v. Correção do trabalho de casa
tempo previsto: 5 minutos

vi. Realização de tarefas
tempo previsto: 40 minutos

vii. Recolha de tarefas

viii. Preenchimento de questionários
tempo previsto: 15 minutos

i. <u>Redação do sumário:</u>

Sumário:

- Formalização da composição de funções;
- Resolução de tarefas.

ii. Recolha do trabalho de casa:

Neste momento da aula, recolher-se-á a resolução de cada aluno da tarefa 7, da página 109 do manual. Esta tarefa foi requerida como trabalho de casa, tendo sido pedido aos alunos que a sua resolução fosse feita numa folha à parte.

iii. Formalização dos conhecimentos presentes no guião da aula anterior:

tempo previsto: 20 minutos

Neste momento da aula, irei discutir no quadro com os alunos a aula anterior. Pretendo, sucintamente, retomar cada enunciado e resolver no quadro as tarefas (do guião aplicado na aula anterior) com a ajuda dos alunos. Assim sendo, este momento irá ser feito, essencialmente, referindo cada enunciado e colocando questões pertinentes aos alunos.

Tarefa 1
$f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$ $A(a, f(a))$, isto é, $A(a, \cos(a))$ $B(a, g(a))$, isto é, $B(a, \sqrt{a})$
1.1 $T(a, \cos(\sqrt{a}))$, T não está definido para valores negativos de a. Nota: B não está definido quando a sua abcissa toma valores negativos. Expressão: $f\left(g(x)\right) = \cos(\sqrt{x})$ Domínio: $D_g = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow D_{f(g)} = \mathbb{R}_0^+$
1.2 $R(a, \sqrt{\cos(a)})$, R apenas está definido quando $\cos(a)$ toma valores não negativos. Como $\cos(a)$ toma valores pertencentes ao intervalo [-1,1], o ponto R apenas está definido quando a abcissa (a) tem imagem por *f* pertencente ao intervalo [0,1]. Ou seja, R não está definido $\forall_{x \in \mathbb{R}}, -1 \leq \cos(x) < 0$. Recorrendo ao círculo trigonométrico, a solução da inequação anterior é o conjunto $\{]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{2}\pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}\}$.

Assim sendo, R apenas está definido quando a sua abcissa pertence ao conjunto $\mathbb{R}\backslash\{[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3}{2}\pi+k\pi[, k \in \mathbb{Z}\}$ Expressão: $g(f(x)) = \sqrt{\cos(x)}$ Domínio: $D_{g(f)} = \mathbb{R}\backslash\{[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3}{2}\pi+k\pi[, k \in \mathbb{Z}\}$.
1.3 As duas representações gráficas não são iguais e, inclusivamente, têm domínios diferentes.

Tarefa 2
$h(x) = x^3$ e $l(x) = \frac{1}{x}$ $A(a, l(a))$, isto é, $A(a, \frac{1}{a})$ $B(a, h(a))$, isto é, $B(a, a^3)$
2.1 $T(a, \frac{1}{a^3})$, T não está definido a é zero, pois $\frac{1}{0}$ é uma indeterminação. Expressão: $h(l(x)) = \frac{1}{x^3}$ Domínio: $D_l = \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow D_{h(l)} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2.2 $R(a, \frac{1}{a^3})$ Logo a expressão e o domínio são iguais à alínea anterior.
2.3 As duas representações gráficas são iguais e têm domínios iguais.

iv. <u>Formalização do conceito de Composição de funções:</u>

tempo previsto: 10 minutos

Neste momento de aula, irei formalizar o conceito de composição de funções, em discussão com os alunos, registando-o no quadro.

Função composta:

Dadas as funções $f: D_f \to A$ e $g: D_g \to B$, a composta de g por f é a função que se representa por $gof: D_{gof} \to B$ e se define por

$$(gof)(x) = g[f(x)]$$

tal que

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g\}.$$

Também se designa por "g composta com f", "g após f" ou "f seguida de g".

v. Realização de tarefas:

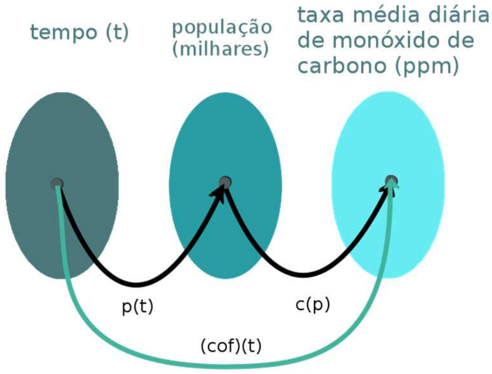
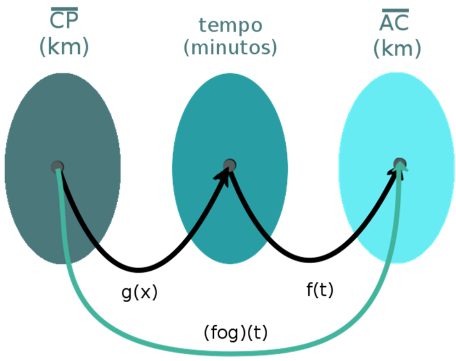
tempo previsto: 40 minutos

Primeiramente, as resoluções irão ser recolhidas. Por isso, ir-se-á avisar os alunos para resolverem a ficha no próprio documento que lhes vai ser entregue. A realização pode ser feita em grupos de, no máximo, quatro elementos. Pretendo, também, colocá-los ao corrente deste facto.

Proceder-se-á à realização da ficha, sendo que irei ajudar os alunos ao longo da mesma.

Quanto à complexidade de cada tarefa da ficha e às dúvidas que podem surgir, sintetizo a tabela seguinte:

Tarefa	Resolução
1	Por uma questão de complexidade de linguagem, os alunos podem não entender de que forma é que a função composta pode ser aplicada. Como possível solução, para que cada aluno compreenda o que corresponde a cada elemento por imagem de cada função, posso optar por desenhar no quadro o diagrama seguinte:

	
2	Caso existam dúvidas de interpretação, pretendo desenhar no quadro o seguinte diagrama: 
3	Qualquer que seja a dúvida que possa surgir, basta explicar ao aluno que deve de aplicar diretamente a definição de função composta (uma vez que naturalmente não há problemas com o domínio ou contradomínio). Assim sendo, o aluno apenas tem de ser encaminhado a perceber que tem de determinar $g(f(-2))$, ou seja, tem de chegar à conclusão que $g(f(-2)) = g(0) = -4$.
4	A maior dificuldade que os alunos terão nesta tarefa será a determinação do domínio e do contradomínio de cada uma das funções compostas.
5	A maior dificuldade para os alunos nesta tarefa será a de perceber que para resolver esta tarefa basta determinar o domínio da composta.

vi. Recolha das tarefas:

Neste momento da aula, decorrerá a recolha da ficha de tarefas de cada aluno.

vii. Preenchimento do questionário:

tempo previsto: 15 minutos

Neste momento da aula, irá ser entregue um questionário ao qual os alunos irão responder.

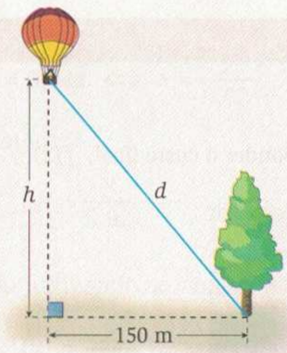
Apêndices

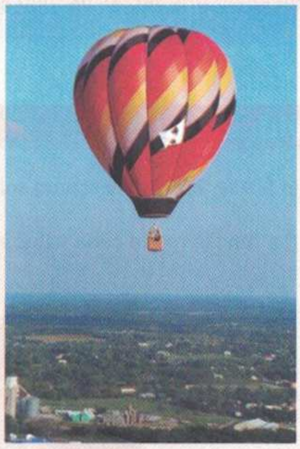
Apêndice IV: enunciado e critérios de avaliação da tarefa do trabalho de casa

A subida do balão

Um balão é lançado verticalmente para o ar.

Um observador encontra-se a 150 m do ponto de lançamento.





7.1. Escreva a distância entre o balão e o observador em função da altura, h, a que se encontra o balão.

7.2. Se a distância do balão ao solo em metros, t segundos depois do lançamento, é dada por $h = 6t$, exprima a distância d entre o observador e o balão em função de t.

Retirado de Matemática A 11.º Ano: Funções II, Porto Editora 2015

<u>Tarefa 7 (100%)</u>

7.1……………………………………………………………………………….50%

Aplicar o Teorema de Pitágoras……………………………………. 10%

Indicar $d(h) = \sqrt{h^2 + 150^2}$……………………………………...40%

7.2……………………………………………………………………………….50%

Aplicar o Teorema de Pitágoras……………………………………. 10%

Substituir com a expressão obtida na alínea 7.1 ……………………...5%

Indicar $d(t) = \sqrt{36t^2 + 150^2}$……………………………………35%

Apêndices

Apêndice V: ficha de tarefas da segunda aula

Matemática A
8 de março de 2016
11.º C
Nome: ____ nº _____

1. Um estudo das condições ambientais de uma comunidade indica que a concentração média de monóxido de carbono no ar será de $c(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão (*ppm), quando a população for de p milhares. Estima-se que, daqui a t anos, a população da comunidade será de $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ milhares. Expressa a concentração média do monóxido de carbono no ar em função do tempo, usando a função composta apropriada.

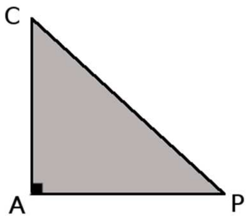
Retirado de http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/funcao_composta-2013.pdf

*ppm – Uma parte por milhão (ppm) denota 1 parte por 1 000 000 partes. Isto é o equivalente a uma gota de água diluída em 50 litros.

2. O carro C, partindo de A no instante *t=0*, viaja à velocidade de *100km/h*. No ponto P, está a Polícia. [APC] é um triângulo retângulo em A. O ponto P encontra-se a uma distância de *2km* do ponto A

a) Seja *f* a função que a cada *t* minutos faz corresponder a distância, em *km*, percorrida pelo carro C desde o ponto de partida. Determine a expressão algébrica da função *f*.

b) Seja *g* a função que a cada x quilómetros de distância entre o carro C e a polícia faz corresponder o tempo decorrido desde a partida do carro C. Determine a expressão algébrica da função *g*.



c) Determina a expressão algébrica de *fog*. Qual é o seu significado no contexto do problema?

Adaptado do manual Matemática A 11°ano, Porto Editora2015

e de Adaptado do manual Matemática A 11°ano, Porto Editora, 2007

3. As funções f e g são duas funções polinomiais do primeiro e segundo graus, respetivamente, e parte das suas representações gráficas encontra-se representada na figura seguinte.

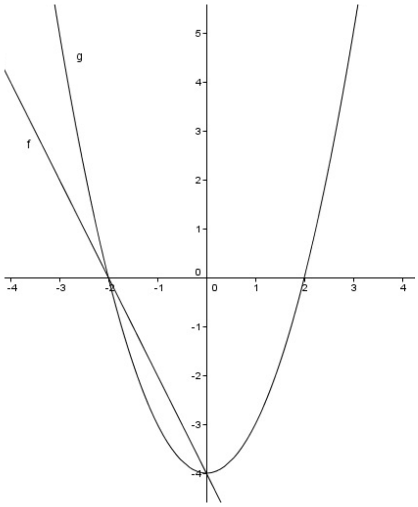
O valor de $(gof)(-2)$ é:

a) -2

b) 0

c) 8

d) -4



4. Considera as funções f e g definidas por: $f(x) = \frac{2}{x-1}$ e $g(x) = \frac{1}{x+3}$.

   a) Determina o domínio de cada uma das funções.
   b) Carateriza as funções fog, gof e fof.

Adaptado do manual Matemática A 11ºano, Porto Editora, 2007

5. Considera as funções $f(x) = -\sin(x)$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, se\ x < -1 \\ \frac{1}{x-1}, se\ x > 1 \end{cases}$ Mostra que a composta de *gof* não pode existir.

Apêndice VI: enunciado e critérios de avaliação do teste

<u>Versão 1</u>:

Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x}{x-2}$ e a função g definida por $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.

Caracterize a função fog.

<u>Versão 2</u>:

Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x}{x-2}$ e a função g definida por $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.

Caracterize a função gof.

<u>Critérios de avaliação</u>

Determinar a expressão algébrica de fog/gof……………………………………50%

<u>Versão 1</u>:

Indicar $(fog)(x) = f(g(x))$……………………………...…10%

Indicar $(fog)(x) = \frac{2+\sqrt{x-1}}{(2+\sqrt{x-1})-2}$………………..………..…...30%

Indicar $(fog)(x) = \frac{2+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$……………………….…...………..10%

<u>Versão 2</u>:

Indicar $(gof)(x) = g(f(x))$……………………………...…10%

Indicar $(gof)(x) = 2 + \sqrt{\frac{x}{x-2} - 1}$……………………...…...30%

Indicar $(gof)(x) = 2 + \sqrt{\frac{2}{x-2}}$……………………...………..10%

Apêndices

Determinar o domínio de fog/gof ……………………..………………………………50%

<u>Versão 1</u>:

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$……………...…..5%

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in [1, +\infty[\wedge \ g(x) \in D_f\}$………...…..5%

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in [1, +\infty[\wedge \ 2 + \sqrt{x-1} \in D_f\}$……..5%

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \in [1, +\infty[\wedge \ 2 + \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}\}$….5%

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1 \ \wedge \ 2 + \sqrt{x-1} \neq 2\}$………………....5%

Indicar $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1 \ \wedge \ x \neq 1\}$……………….......20%

Indicar $D_{fog} =]1, +\infty[$…………………......………………....5%

<u>Versão 2</u>:

Indicar $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g\}$……………...…..5%

Indicar $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \ \wedge \ f(x) \in D_g\}$……….....…..5%

Indicar $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \wedge \frac{x}{x-2} \in D_g\}$………………....5%

Indicar $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \wedge \frac{x}{x-2} \in [1, +\infty[\}$…………...5%

Indicar $D_{gof} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq 2 \wedge \frac{x}{x-2} \geq 1\right\}$…………………5%

Indicar $D_{gof} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq 2 \wedge \frac{2}{x-2} \geq 0\right\}$………………...10%

Indicar $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2 \wedge x \geq 2\}$…………………......10%

Indicar $D_{gof} =]2, +\infty[$…………………......………………...5%

Apêndices

Apêndice VII: questionário

A tua opinião conta:

Nome: ____ Nº____

Na última aula, utilizaste o GeoGebra para resolver tarefas relativas à função composta. Hoje, retomou-se esse tópico e sintetizaram-se aspetos principais relativos à composição de funções.

Tendo presente esta estratégia, para cada questão, assinala com um X o valor da escala que melhor traduz a tua opinião. O 1 refere-se a discordo totalmente e o 5 a concordo totalmente.

Com/Esta estratégia…	1	2	3	4	5
aprendi.					
foi divertida.					
foi interessante.					
foi desmotivante.					
foi confusa.					
não entendi o que era suposto fazer.					
eu empenhei-me no que me foi proposto.					

Destaca os aspetos mais positivos desta estratégia:

Destaca os aspetos menos positivos desta estratégia:

Usa alguns adjetivos para descrever esta forma de aprender:

Acrescenta alguma sugestão e/ou comentário que consideres pertinente:

Apêndice VIII: grelha geral de classificação final

nome	par	Primeira aula – Tarefa 1 – produção digital (GeoGebra)	Primeira aula – Tarefa 1 – produção escrita	Primeira aula – Tarefa 2 – produção digital (GeoGebra)	Primeira aula – Tarefa 2 – produção escrita	Trabalho de casa	Segunda aula – Ficha de tarefas	Teste
Maria	a	100	97	90	74	Não entregou	65	100
Mariana			95		64	75	59	50
Rogério	b	100	82	0	0	100	50	68
Ronaldo			83		0	80	50	73
António	c	90	67	0	0	85	46	Não realizou
Antero			79		0	85	45	96
Cassandra	d	100	76	70	5	85	55	85
Carla			70		5	85	50	70
Francisco	e	100	86	0	0	85	38	58
Fernando			85		0	85	25	25
Pedro	f	90	60	0	0	85	35	Não realizou
Paulo			45		0	85	35	49
Beatriz	g	100	92	70	21	85	43	68
Bianca			92		21	85	43	93
Rita	h	100	78	0	0	85	39	100
Rúben			78		0	85	33	97
Neusa	i	80	57	0	0	100	48	20
Natália			65		0	85	48	99
Nilce			62		0	85	42	70
Lucas	j	95	67	0	0	85	55	100
Linda			67		0	85	56	61
Catarina	k	80	80	0	0	100	40	50
Cátia			68		0	100	40	25

nome	par	Primeira aula					Segunda aula	Teste
		Tarefa 1		Tarefa 2		Trabalho de casa	Ficha de tarefas	
		produção digital (GeoGebra)	produção escrita	produção digital (GeoGebra)	produção escrita			
Maria Mariana	a	100	97 95	90	74 64	Não entregou 75	65 59	100 50
Rogério Ronaldo	b	80	82 83	0	0 0	100 80	50 50	68 73
António Antero	c	90	67 79	0	0 0	85 85	46 45	Não realizou 96
Cassandra Carla	d	100	76 70	70	5 5	85 85	55 50	85 70
Francisco Fernando	e	100	86 85	0	0 0	85 85	38 25	58 25
Pedro Paulo	f	90	60 45	0	0 0	85 85	35 35	Não realizou 49
Beatriz Bianca	g	100	92 92	70	21 21	85 85	43 43	68 93
Rita Rúben	h	100	78 78	0	0 0	85 85	39 33	100 97
Neusa Natália Nilce	i	80	57 65 62	0	0 0 0	100 85 85	48 48 42	20 99 70
Lucas Linda	j	95	67 67	0	0 0	85 85	55 56	100 61
Catarina Cátia	k	80	80 68	0	0 0	100 100	40 40	50 25

Apêndices

Apêndice IX: critérios de avaliação do guião da primeira aula – tarefa 1 em suporte papel

Tarefa 1 (100%)

1.1…………………………………………………………………………….45%

a) ………………………………………………………………………….10%

Indicar que T está definido para valores de $a \geq 0$………………...5%

- Caso apenas indiquem que está definido em alguns casos..3%

Indicar que T não está definido……………………………………5%

b) ………………………………………………………………………….20%

Indicar o valor em cada lacuna por preencher exceto $g(-1)$ e $f(g(-1))$………...1%

Indicar que $g(-1)$ não está definido………………………………2%

Indicar que $f(g(-1))$ não está definido………………………..…2%

c) …………………………………………………………………………...5%

Indicar que a expressão algébrica desta função é $\cos(\sqrt{x})$…..…...5%

d) ………………………………………………………………………….10%

Indicar que o domínio desta função é $[0, +\infty[$………………….....10%

- Caso o intervalo indicado seja aberto em 0 ………………………………………...…..8%

1.2………………………………………………………………………….45%

a) ………………………………………………………………………….16%

Indicar que R não está definido para todos os valores de a…………………………………………………...……………...5%

Indicar que R não está definido para $a \in [2,4]$………………………………………………………………5%

R está definido quando $\cos(a) \geq 0$……………………………….3%

Determinar dois intervalos…………………………………………4%

- Se apenas indicar um intervalo…………..........2%
- Se um dos intervalos esteja incorreto……….2%

b) ………………………………………………………………………….19%

Indicar o valor em cada lacuna por preencher exceto $g(f(2))$…………...1%

Indicar que $g(f(2))$ não está definido…………….……………………2%

c) ………………………………………………………………………….5%

Indicar que a expressão algébrica desta função é $\sqrt{\cos(x)}$…..…...5%

d) ………………………………………………………………………….5%

Indicar que o domínio desta função é $\left\{x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$…………………………………...………….……........5%

- Caso apenas seja indicado que o domínio é $D_g \backslash \{x \in \mathbb{R}: g(x) < 0\}$……………………….……….....…..2%

1.3………………………………………………………………………………10%

Indicar que as representações não são semelhantes……….…......10%

Apêndices

Apêndice X: critérios de avaliação do guião da primeira aula – tarefa 2 em suporte papel

<u>Tarefa 2 (100%)</u>

2.1………………………………………………………………………………….45%

a) ……………………………………………………………………………….10%

Indicar que T está definido para valores de $a \geq 0$………………...5%

- Caso apenas indiquem que está definido em alguns casos...3%

Indicar que T não está definido……………………………………5%

b) ……………………………………………………………………………….20%

Indicar o valor em cada lacuna por preencher exceto l(0) e $h(l(0))$………...1%

Indicar que l(0) não está definido………………………………2%

Indicar que $h(l(0))$ não está definido………………………..…2%

c) ……………………………………………………………………………...5%

Indicar que a expressão algébrica desta função é $\cos(\sqrt{x})$…..…...5%

d) ……………………………………………………………………………….10%

Indicar que o domínio desta função é $[0, +\infty[$…………….….....10%

- Caso o intervalo indicado seja aberto em 0 ……………………………………...….8%

2.2………………………………………………………………………………45%

a) ……………………………………………………………………………….10%

Indicar que R não está definido para $a = 0$………...……………...5%

Indicar que R está definido para $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$……..……………...…5%

b) ……………………………………………………………………………….20%

Indicar o valor em cada lacuna por preencher exceto $l(0)$ e $l(h(0))$………...1%

Indicar que $l(0)$ não está definido……………….………………2%

Indicar que $l(h(0))$ não está definido…………………………2%

c) ……………………………………………………………………………….5%

Indicar que a expressão algébrica desta função é $\frac{1}{x^3}$…..……….....5%

d) ……………………………………………………………………………….10%

Indicar que o domínio desta função é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$…….……….……........10%

2.3.……………………………………………………………………………….10%

Indicar que as representações não são semelhantes…….….……......10%

Apêndice XI: critérios de avaliação do guião da primeira aula – tarefa 1 em suporte digital

<u>Tarefa 1 (100%)</u>

1.1…………………………………………………………………………………….70%

Criou seletor ……………………………………………………...10%

Representou graficamente a função f …………………………...15%

Representou graficamente a função g …………………………...15%

Criou A com abcissa correta ………………………………………5%

Criou A com ordenada correta …………………………………….5%

Criou B com abcissa correta ………………………………………5%

Criou B com ordenada correta …………………………………….5%

Criou T com abcissa correta ………………………………………5%

Criou T com ordenada correta …………………………………….5%

1.2…………………………………………………………………………………….10%

Criou R com abcissa correta ………………………………………5%

Criou R com ordenada correta …………………………………….5%

1.3…………………………………………………………………………………….20%

Representou a função de 1.1 ……………………………………..10%

Representou a função de 1.2 ……………………………………..10%

Apêndice XII: critérios de avaliação do guião da primeira aula – tarefa 2 em suporte digital

<u>Tarefa 2 (100%)</u>

2.1………………………………………………………………………………….70%

Criou seletor …………………………………………………...10%

Representou graficamente a função h …………………………...15%

Representou graficamente a função l …………………………...15%

Criou A com abcissa correta ………………………………………5%

Criou A com ordenada correta …………………………………….5%

Criou B com abcissa correta ………………………………………5%

Criou B com ordenada correta …………………………………….5%

Criou T com abcissa correta ………………………………………5%

Criou T com ordenada correta …………………………………….5%

2.2………………………………………………………………………………….10%

Criou R com abcissa correta ………………………………………5%

Criou R com ordenada correta …………………………………….5%

2.3………………………………………………………………………………….20%

Representou a função de 2.1 ……………………………………..10%

Representou a função de 2.2 ……………………………………..10%

Apêndices

Apêndice XIII: critérios de avaliação da ficha de tarefas da segunda aula

Tarefa 1 (15%)

Determinar a função composta cop ………………………………………………15%

Tarefa 2 (30%)

a) ……………………………………………………………………………10%

Obter $\frac{100}{60}$………………………………………………………...5%

Indicar a multiplicação de t com $\frac{100}{60}$ …………………………………….3%

Determinar f………………………………………………………………2%

b) ……………………………………………………………………………10%

Aplicar o Teorema de Pitágoras……………………….....……..3%

Substituir $\overline{AC}$ por $f(t)$……………………………………………..2%

Colocar $\overline{AC}$ em função de $\overline{CP}$….……………………………………..3%

Determinar g ………….……………………………………………...2%

c) ……………………………………………………………………………10%

Determinar a função composta fog ……………........................5%

Aplicar $(fog)(x) = f[g(x)]$ ……………………………3%

Desenvolver $(fog)(x) = f[g(x)]$ ………………………2%

Interpretar corretamente fog ……………………………………5%

Tarefa 3 (15%)

Resposta: alínea d).

Tarefa 4 (25%)

a) ……………………………………………………………………………10%

Determinar D_f……………………………………………………5%

Determinar D_g……………………………………………………5%

b) ……………………………………………………………………………………15%

Caracterizar fog ……………………………………………….5%

Determinara a expressão algébrica de fog……………2%

Determinar D_{fog}……………………………………..…2%

Determinar D'_{fog}………………………………………1%

Caracterizar gof ……………………………………………….5%

Determinara a expressão algébrica de gof……………2%

Determinar D_{gof}……………………………………..…2%

Determinar D'_{gof}………………………………………1%

Caracterizar fof ……………………………………………….5%

Determinara a expressão algébrica de fof……………2%

Determinar D_{fof}……………………………………..…2%

Determinar D'_{fof}………………………………………1%

Tarefa 5 (15%)

Determinar D_{gof}…………………………………………………………………...10%

Determinar expressão geral para D_{gof} ……………………5%

Desenvolver corretamente as condições necessárias à existência de D_{gof}…………………………………………5%

Reconhecer que gof não existe devido a $D_{gof} = \emptyset$………………………………..5%

Apêndices

Apêndice XIV: diário de bordo – primeira aula

No dia 4 de março de 2016 decorreu a primeira aula (90 minutos).

Comecei por explicar que iriamos usar o GeoGebra, seria uma aula em grupo e tinham um guião para cada aluno que cada um individualmente teria de preencher. Pedi que se dividissem aos pares (porém um dos grupos tinha três elementos de modo a que um aluno não ficasse sem par), se dirigissem aos computadores e começassem a resolver o guião. Inicialmente, demoraram um pouco a instalar-se a uma sala e rotina que não lhes era habitual, fazendo algum barulho.

Alguns dos computadores demoraram mais do que os outros a ligar, mas todos os alunos conseguiram arranjar um computador que funcionasse e que tivesse o GeoGebra instalado.

Neste momento, comecei por explicar como criar um seletor em GeoGebra recorrendo ao computador e ao projetor.

Os alunos iniciaram, então, a tarefa 1 e eu fui sempre observando entre os grupos e tentando que eles expusessem as suas dúvidas quando estas surgissem. Desloquei-me várias vezes pela sala durante toda a aula para estar ao corrente do que os alunos estavam a fazer, para averiguar se haviam dúvidas que ainda não tivessem colocado e para que não perdessem o ritmo.

Os alunos não tiveram dificuldades na construção do seletor, nem na construção dos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (a, g(a))$.

O grupo f encontrou-se ao início mais atrasado devido a terem criado de forma errada o ponto $R = (a, f(g(a)))$ e, como este aparentava estar certo, levou a que eu acabasse por detetar quando os restantes grupos já se encontravam em alíneas posteriores. O Pedro parecia um pouco mais curioso que o Paulo, sendo que era o primeiro que puxava pelo segundo para que conseguissem resolver as tarefas. Era também o Pedro que levantava mais dúvidas nas construções.

No preenchimento da primeira tabela (alínea b) do ponto 1.1), alguns alunos precisaram de alguma ajuda a interpretar, especialmente na última linha, que era a linha que considerava o seletor a igual a x. Mas bastou fazer perguntas como ‘onde podemos ver a imagem de g quando a abcissa é a?' e 'Então e quando a abcissa é esse valor?' que os alunos iam compreendendo.

Da primeira vez em que os alunos tinham de determinar a expressão algébrica de uma função composta (alínea c) de 1.1), por causa de constar na tabela o caso geral (a última linha pedia indiretamente qual a expressão de fog na primeira coluna, pois a abcissa não era uma constante real mas um caso geral - x) os alunos não demonstraram dificuldades. O mesmo se verificou para a alínea c) dos pontos 1.2, 2.1 e 2.2.

Em geral os alunos demonstraram interesse, porém a maioria dos grupos acabava por se distrair. O grupo i mostrava quase um desinteresse por vezes, sendo o grupo que se preocupava mais em conversar por oposição a trabalhar, mesmo quando eu tentava perceber quais as suas dúvidas e lhes pedia para aumentarem o ritmo. Ainda assim, pareceram envolver-se muito mais nas tarefas desta aula do que nas tarefas das outras aulas de Matemática.

Alguns dos alunos foram despendendo de algum tempo ao longo da aula para tornar as ilustrações mais apelativas, por exemplo, o grupo a, na tarefa 1, desenhou a função fog a azul claro e a função composta gof a verde.

Ocorreu ao longo da aula comunicação entre os grupos, sendo que, por vezes trocavam impressões entre si.

O grupo a foi o mais bem-sucedido, sendo o único grupo a acabar o guião por inteiro. Este grupo destaca-se ainda por não só ter terminado, como terminou antes da aula ter chegado ao final. Em geral, tanto a Maria como a Mariana não me pediram ajuda e notava-se que estavam ambas a discutir as construções e as tarefas entre si.

O grupo b trabalhou um pouco silenciosamente, se bem que chamou-me algumas vezes para tirar algumas dúvidas. Em geral, tanto o Rogério como o Ronaldo pareciam bastante envolvidos nas tarefas, partilhando e discutindo ideias entre si.

Os grupos que revelaram também um grande empenho foram os d e g.

Do grupo d, a Cassandra e a Carla ambas trabalharam e pareciam empenhar-se, se bem que a Carla, como lhe era usual durante as aulas de Matemática, não levantou muitas dúvidas, parecia focada na resolução da tarefa e em resolver sem ajuda externa.

O grupo e foi pedindo a minha ajuda, mas demorou ainda bastante tempo na resolução da primeira tarefa.

O grupo j trabalhou bem, não tendo muitas dúvidas e também foi um dos grupos que procurou no final da primeira tarefa colocar alguns dos objetos no GeoGebra a cores mais atrativas. Normalmente, nas aulas de matemática o Lucas e a Linda costumam sentar-se lado a lado e é sempre a Linda que incentiva mais o Lucas a resolver as tarefas. Porém, a Linda costuma de por vezes ter algumas dificuldades. Nesta aula o Lucas também para ajudar a sua colega nas produções do GeoGebra, empenhou-se na sua resolução.

O grupo g, como seria de esperar uma vez que a Beatriz era uma das alunas que mais se mostrava interessada e empenhada nas aulas de Matemática, também foi um dos grupos que teve dificuldade inicialmente com a expressão "a imagem por f da respetiva imagem de a por g", mas após eu ter ajudado a desconstruir o respetivo significado (através do levantamento de perguntas apropriadas) não levantaram mais nenhuma dúvida significativa e trabalharam calmamente partilhando ideias entre si. Tanto a Beatriz como a Bianca pareciam motivadas pelo desafio diferente que foi toda esta aula.

Pela reação dos alunos, tornou-se claro que acharam o guião muito extenso. Como exemplo, um dos membros do grupo b, conforme avisei a turma para aumentar o ritmo (para que pudessem terminar o guião), perguntou-me se a aula seguinte não seria para terminar esta mesma ficha. À minha resposta de não, mostrou uma expressão de surpresa.

Tentei ao longo de toda a aula chegar a todos os grupos e atender a todas as dúvidas, quando os alunos não pediam a minha ajuda para nada em particular eu ía de grupo em grupo, verificando alguns erros que pudessem estar ocultos e colocando questões para que entendessem o porquê da forma como o guião estava construído.

A maior dificuldade para os alunos aparentou ser a interpretação da expressão "imagem por f da respetiva imagem de a por g", sendo que acabei por em alguns casos ter de colocar algumas questões como "o que significa a imagem de a por g?" e "o que é a imagem por f?".

No ponto 1.2, ponto que tratava a função composta gof, os alunos tiveram alguma dificuldade em perceber quais os intervalos em que a função estava definida, acabaram por muitas vezes não chegar a uma condição mais geral para o valor das abcissas. Porém ainda houve conclusões comparativas interessantes.

De um modo geral, os alunos, como já mencionei, envolveram-se nas tarefas e cooperaram entre si. Houve, também, muita intervenção por parte todos os alunos comparativamente às aulas normais de Matemática.

A aula terminou com a recolha dos documentos em GeoGebra produzidos pelos alunos e com a comunicação de qual era o trabalho de casa.

Apêndices

Apêndice XV: diário de bordo – segunda aula

No dia 8 de março de 2016 decorreu a segunda aula (90 minutos).

Na aula anterior, os alunos tinham sido notificados que o trabalho de casa teria de ser feito numa folha à parte para ser recolhido, assim sendo esta aula foi iniciada com a recolha dos trabalhos de casa. Uma das alunas do grupo a não realizou e, portanto, não entregou o trabalho de casa.

De seguida, sintetizou-se no quadro a resolução das tarefas do guião da aula anterior. Após a sintetização, foi formalizado o conceito de composição de funções. Os alunos infelizmente não levantaram dúvidas neste momento de aula.

O momento seguinte de aula foi a entrega e resolução da ficha de tarefas. Os alunos trabalharam novamente em grupos.

Avisei os alunos que as fichas iriam ser recolhidas, mas que quando a resolução fosse feita no quadro não a passassem para a ficha nem alterassem a resolução original. E ao longo de toda a aula, mantive-me atenta para que tal acontecesse.

Ao iniciarem a resolução da primeira tarefa pude notar que toda a turma conseguiu resolver, de um modo geral, sem colocar dúvidas.

Os alunos tiveram ainda muitas dúvidas nesta aula, porém estas dúvidas não estavam, na sua grande maioria, relacionadas com a composição de funções propriamente dita. As dúvidas gerais que os grupos levantavam estavam relacionadas com a interpretação do enunciado maioritariamente da segunda tarefa.

Com as muitas dúvidas que surgiram com a segunda tarefa os alunos despenderam de muito tempo de aula nesta tarefa, o que atrasou um pouco a aula. Também devido a ter tirado as dúvidas desta tarefa grupo a grupo e não no quadro para toda a turma, acabei por apenas resolver com os alunos no quadro a primeira tarefa.

A terceira tarefa não foi realizada por todos os alunos, mas a maioria dos alunos resolveu-a por aplicação direta da definição de composição de funções.

Na quarta tarefa os alunos já foram colocando algumas dúvidas. Notou-se em alguns alunos dificuldade no uso da notação de conjuntos na determinação do domínio da composta, mas notou-se que de um modo geral os alunos estavam a compreender tanto como determinar as expressões algébricas como o domínio das funções compostas propostas. Alguns alunos estranharam determinar a composta de uma função por ela mesma, mas com a formalização realizada no início da aula a maioria dos alunos estava a acompanhar. A verdadeira dificuldade para quase todos os alunos foi mostrar porque uma das funções compostas proposta não podia existir.

Dado o atraso, a quinta tarefa não foi realizada em aula. E, por fim, o último momento de aula foi o preenchimento do questionário que entreguei também no âmbito deste Relatório.

Apêndice XVI: grelha de classificação final para o guião de tarefas em suporte digital

Primeira tarefa:

Nome	Grupo	1.1 (70%)	1.2 (10%)	1.3 (20%)	Total
Maria Mariana	a	70	10	20	100
Rogério Ronaldo	b	70	10	0	80
António Antero	c	70	10	10	90
Cassandra Carla	d	70	10	20	100
Francisco Fernando	e	70	10	20	100
Pedro Paulo	f	70	10	10	90
Beatriz Bianca	g	70	10	20	100
Rita Rúben	h	70	10	20	100
Neusa Natália Nilce	i	70	10	0	80
Lucas Linda	j	65	10	20	95
Catarina Cátia	k	70	10	0	80

Apêndices

Segunda tarefa:

Nome	Grupo	2.1 (70%)	2.2 (10%)	2.3 (20%)	Total
Maria Mariana	a	70	10	10	90
Rogério Ronaldo	b	0	0	0	0
António Antero	c	0	0	0	0
Cassandra Carla	d	70	0	0	70
Francisco Fernando	e	0	0	0	0
Pedro Paulo	f	0	0	0	0
Beatriz Bianca	g	70	0	0	70
Rita Rúben	h	0	0	0	0
Neusa Natália Nilce	i	0	0	0	0
Lucas Linda	j	0	0	0	0
Catarina Cátia	k	0	0	0	0

Apêndices

Apêndice XVII: grelha de classificação final para o guião de tarefas em suporte papel

Primeira tarefa:

nome	par	1.1 (45%)				1.2 (45%)				1.3 (10%)	total
		a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)		
Maria	a	10	20	5	10	16	19	5	2	10	97
Mariana		8	20	5	10	16	19	5	2	10	95
Rogério	b	10	20	5	10	14	18	5	0	0	82
Ronaldo		10	20	5	10	14	19	5	0	0	83
António	c	10	20	5	8	9	15	0	0	0	67
Antero		10	20	5	10	16	18	0	0	0	79
Cassandra	d	10	20	5	0	8	17	5	1	10	76
Carla		10	20	5	0	7	18	0	0	10	70
Francisco	e	10	18	5	10	9	17	5	2	10	86
Fernando		10	18	5	10	9	16	5	2	10	85
Pedro	f	10	20	5	10	12	3	0	0	0	60
Paulo		10	14	5	10	6	0	0	0	0	45
Beatriz	g	10	20	5	10	13	19	5	0	10	92
Bianca		10	20	5	10	13	19	5	0	10	92
Rita	h	5	20	5	10	4	17	5	2	10	78
Rúben		5	20	5	10	4	17	5	2	10	78
Neusa	i	10	15	5	10	9	8	0	0	0	57
Natália		10	15	5	10	13	12	0	0	0	65
Nilce		10	16	5	10	9	12	0	0	0	62
Lucas	j	3	18	5	0	7	19	5	0	10	67
Linda		3	18	5	0	7	19	5	0	10	67
Catarina	k	10	20	5	10	11	19	5	0	0	80
Cátia		10	20	5	10	11	12	0	0	0	68

Segunda tarefa:

nome	par	2.1 (45%) a)	2.1 (45%) b)	2.1 (45%) c)	2.1 (45%) d)	2.2 (45%) a)	2.2 (45%) b)	2.2 (45%) c)	2.2 (45%) d)	2.3 (10%)	total
Maria	a	10	20	5	10	10	19	0	0	0	74
Mariana	a	10	20	5	10	0	19	0	0	0	64
Rogério	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ronaldo	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
António	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Antero	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cassandra	d	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Carla	d	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Francisco	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fernando	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pedro	f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Paulo	f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Beatriz	g	10	11	0	0	0	0	0	0	0	21
Bianca	g	10	11	0	0	0	0	0	0	0	21
Rita	h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rúben	h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Neusa	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Natália	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nilce	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lucas	j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Linda	j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Catarina	k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cátia	k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0